МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

В.А. СУРОВЦЕВ

Ф.П. РАМСЕЙ И ПРОГРАММА ЛОГИЦИЗМА

Издательство Томского университета
2012

УДК 316.42:35
ББК 87.5
С 90

Суровцев В.А.
С 90 **Ф.П. Рамсей и программа логицизма.** Томск: Изд-во Том. ун-та, 2012. – 258 с.

ISBN 978-5-7511-2099-3

Рассматривается программа логицизма в основаниях математики с точки зрения новаций, предложенных Ф.П. Рамсеем. Анализируется эволюция взглядов на философию математики самого Ф.П. Рамсея.

Для философов, логиков, специалистов в области оснований математики.

УДК 316.42:35
ББК 87.5

Работа выполнена при поддержке РГНФ (грант № 11-03-00039а), РФФИ (грант № 12-06-00078-а) и в рамках государственного задания Минобрнауки РФ на проведение научных исследований (тематический план НИР Томского государственного университета) № 6.4832.2011

ISBN 978-5-7511-2099-3

ВВЕДЕНИЕ

В предисловии к посмертно опубликованному сборнику работ Ф.П. Рамсея «Основания математики и другие логические исследования» [78] Дж.Э. Мур писал:

> Он мыслил необычайно ясно. Никто с такой лёгкостью, как он, не мог избежать смешений в мысли, которым подвержены даже лучшие философы. Он мог уловить и проследить тончайшие различия. Более того, он обладал исключительной способностью выводить следствия из сложнейшего множества фактов. Он обладал способностью видеть то, что следует или может следовать из этих фактов, взятых вместе, когда другие вообще не видели никаких следствий. И вместе с тем, несмотря на его утончённость и изобретательность, которые часто вели многих других философов к отрицанию очевидных фактов, он производил впечатление человека, в самой совершенной степени обладающего здравым смыслом. Он, как казалось мне, обладал прекрасным чувством меры. Он видел, какие проблемы наиболее фундаментальны, и именно эти проблемы наиболее его интересовали, именно их он стремился решить. По этим причинам, вероятно, как и другие, я почти всегда чувствовал, в отношении любой темы, которую мы обсуждали, что он понимал её лучше, чем я. И там, где (как часто случалось) он не мог меня убедить, я в общем осознавал, что, вероятно, ошибаюсь я, а он прав, и моё с ним несогласие соответствует недостатку интеллектуальных сил с моей стороны [72. P. VII].

Эта блистательная характеристика ведущего кембриджского философа первой половины прошлого века, одного из родоначальников современной аналитической философии относится к человеку, прожившему всего 26 лет. Фрэнк Пламптон Рамсей

(22 февраля 1903 – 19 января 1930) – выдающийся математик, экономист и философ[1].

В математике он известен, прежде всего, своей теоремой, которая, будучи сформулирована для частного случая проблемы разрешения, в конечном счёте, в 70-х годах прошлого века привела к появлению в рамках теории графов специфического раздела, называемого ныне «Теорией Рамсея». Что касается экономики, то любой современный учебник по математическим исследованиям в этой области отталкивается от результатов, полученных Ф.П. Рамсеем относительно экономического поведения и решений. Здесь мы не будем касаться этих достижений, оставляя их более компетентным в данных областях исследователям.

Нас интересуют, прежде всего, философские взгляды Рамсея. Отчасти это связано с тем, что, несмотря на их популярность, а имя Рамсея появляется во множестве исследований, посвящённых проблемам универсалий, соотношения суждений и фактов, причинности, вероятности, истины и убеждений, структуре научных теорий и многим другим, его взгляды ещё далеки от систематического исследования и изложения[2]. В России специалистам по философии имя Рамсея, несмотря на появившийся недавно сборник переводов его работ на русский язык [16], остаётся почти неизвестным.

Кроме того, мы будем анализировать не все философские идеи Рамсея, но по преимуществу те его взгляды, которые касаются оснований математики и математической логики. Связано это с несколькими причинами. Во-первых, исследования в области оснований математики и математической логики, по словам Б. Рассела, всегда проходят несколько философски. Эта область исследований, с одной стороны, следует математической строгости в разработке и использовании формализмов, что роднит её с наиболее абстрактными разделами собственно математики, но, с другой стороны, попытка прояснения фундаментальных математических понятий за-

[1] Здесь мы не останавливаемся на подробностях биографии Ф.П. Рамсея. Отсылаем к блестящему биографическому очерку Д.Х. Меллора [14] и соответствующему разделу монографии Н.-Э. Салин [84].

[2] Единственным исключением здесь является монография Н.-Э. Салин [84]. Отчасти данное обстоятельство компенсируется тем, что собственно философским взглядам Ф.П. Рамсея посвящены несколько тематических выпусков ведущих в области аналитической философии журналов [52; 71; 88] и ряд коллективных монографий [47; 57; 74; 77], вышедших в основном по результатам конференций, проводившихся в связи со столетием со дня рождения Рамсея.

ставляет обращаться к философскому пониманию того, на что ориентируется и что пытается сделать математик, когда использует понятия множества, числа, функции и т.д., поскольку их интерпретация во многом зависит от эпистемологических и онтологических предпочтений. Поэтому философские взгляды в данной наиболее абстрактной области способствуют пониманию идей, касающихся более «приземлённых» областей. Это относится и к Рамсею, поскольку многие его философские идеи зависят от того, как им интерпретируются и понимаются некоторые теории математической логики.

Во-вторых, первые опубликованные работы Рамсея касались именно оснований математики. Этими проблемами он интересовался на протяжении всей своей короткой жизни, и именно при их разработке можно проследить определённую эволюцию его философских взглядов. Изменение этих взглядов в большой степени зависит от изменения его интересов в области оснований математики, в частности, эволюция от логицизма в сторону умеренного интуиционизма.

В-третьих, в исследованиях по основаниям математики наиболее полно проявляется философский стиль Рамсея, впрочем, свойственный всей аналитической философии, где внимание к нюансам и их разработка ставятся во главу угла. Именно внимание к нюансам при анализе некоторых проблем оснований математики, скажем, таких как проблема тождества, отличие объективного значения функции от субъективных возможностей выражающего её логика, экстенсиональный характер математики, понятие математической тавтологии, позволяет сохранить свой эвристический потенциал для современной философии математики и использовать при решении ряда проблем.

В-четвёртых, некоторые достижения Рамсея – например, классификация парадоксов на теоретико-множественные и семантические, элиминация аксиомы сводимости и т.п. – вошли в арсенал современных исследований по основаниям математики. Редкое руководство по математической логике обходится без их упоминания[1]. Однако следует учесть, что эти достижения Рамсея основаны на ряде философских предпосылок, в частности математическом реализме и экстенсиональной трактовке математики. Поэтому их некритическое принятие в области, которая находится на стыке математики и филосо-

---

[1] Оценивая вклад Рамсея в основания математики, Рассел писал: «Его работа по математической логике, как мне кажется, наиболее важная из того, что появилось со времен *Логико-философского трактата* Витгенштейна» [83; 482].

фии, может привести к неверной интерпретации результатов, казалось бы, полученных независимо.

В-пятых, первоначальные идеи Рамсея развивались в рамках программы логицизма, которая пыталась представить математику в качестве развитой логики. Эта программа не удовлетворяла многих исследователей из-за принимаемых в её рамках, но не сводимых к логике предпосылок. Рамсей попытался освободить эту программу от всего, что выходит за рамки логики. В этом его попытку можно считать крайне интересной для исследования кульминацией программы логицизма и, вместе с тем, некоторым завершающим её этапом. И наконец, не так давно были практически полностью опубликованы архивные материалы Рамсея [80; 81], в которых многие тексты посвящены философии математики. Эти тексты позволяют лучше понять, как складывались и эволюционировали его взгляды, что делает их предметом интересной историко-философской разработки.

В первом приближении, не обращаясь к деталям, позицию Рамсея, как она представлена в данной монографии, можно охарактеризовать следующим образом. Среди трёх направлений в основаниях математики, развиваемых в начале прошлого века, а именно, логицизма, интуиционизма и формализма, Ф.П. Рамсей поначалу выбирает первое. Он однозначно причисляет себя к сторонникам Г. Фреге, Б. Рассела и А.Н. Уайтхеда, считавших, что вся математика, т.е. её понятия и предложения, выводима из понятий и предложений логики. Выдвинутая им по ходу обоснования своей позиции критика интуиционизма и формализма имеет важное значение. Но он прекрасно осознаёт недостаточность решения, предложенного Уайтхедом и Расселом в *Principia Mathematica,* которая связана, прежде всего, с неопределённостью того, что считать предложениями логики. Некоторые из основоположений Б. Рассела и А.Н. Уайтхеда, принятые ими, чтобы избежать изначальной фрегеанской позиции, не свободной от противоречий, вызывают сомнение не только в своей логической природе (аксиома мультипликативности, аксиома бесконечности), поскольку они в отличие от чистой логики нечто утверждают о мире, но и в обоснованности вообще (аксиома сводимости). Именно эти сомнения зачастую вызывали неприятие позиции логицизма. Поэтому для реализации данной программы необходимо выяснить статус предложений логики, аналитичность которых всегда противопоставлялась предложениям, чья истинность или ложность зависит от структуры мира. Здесь Ф.П. Рамсей принимает точку зрения Л. Витгенштейна, который в «Логико-философском трактате» последовательно проводит мысль, что все предложения логики являются тавтологиями. Таким образом, чтобы обосновать точку зрения логицизма, необходимо обосновать, что вызывающие сомнение положения либо излишни, либо являются тавтологиями, если соответствующим способом модифицировать их понимание. Ф.П. Рамсей пытается реформировать логицизм, предлагая первую альтернативу для аксиомы сводимости, а вторую – для аксиом мультипликативности и бесконечности. Эту реформу Рамсей реализует в работе «Основания математики». Однако, несмотря на определённые достижения, Ф.П. Рамсей осознаёт их ограниченность, поскольку вторая альтернатива решалась лишь в тех формальных системах, которые связаны особыми условиями. Уже в следующей работе по основаниям математики «Математическая логика» Рамсей выказывает сомнения в логическом статусе аксиомы бесконечности и утверждает, что программа логицизма в полной мере не реализуема. В результате взгляды Рамсея эволюционирует в сторону умеренного интуиционизма и формализма. Это общие контуры, в рамках которых в монографии излагается материал. Этот материал потребовал попутного рассмотрения взглядов Фреге, Рассела, Витгенштейна (особенно *глава 1*), без чего идеи Рамсея для неподготовленного читателя были бы просто непонятны. *Глава 2* в основном посвящена рассмотрению аксиомы сводимости. Здесь особое внимание уделено модификации Рамсеем понятия предикативной функции у Рассела, рассмотрена предложенная Рамсеем новая теория типов и проанализированы реалистические предпосылки, на которых основаны эти изменения. В *главах 3* и *4* особое внимание уделяется экстенсиональной трактовке математики и понятию математической тавтологии, что позволяет Рамсею переинтерпретировать ряд положений Уайтхеда и Рассела на основании водимого им понятия экстенсиональной функции. Отметим, что при интерпретации этих взглядов Рамсея в значительной степени привлекались архивные материалы, которые лучше помогают понять генезис его взглядов, особенно это касается концепции тождества, количества вещей в мире и трансцендентального смысла аксиомы бесконечности. В *главе 5* на основании архивных материалов рассмотрена эволюция взглядов Рамсея в сторону умеренного интуиционизма Г. Вейля.

В своих исследованиях Ф.П. Рамсей в основном использует символику, принятую Б. Расселом и А.Н. Уайтхедом в *Principia Mathematica*, хотя иногда в его работах встречается обычная математическая запись и некоторые специфические обозначения. Нами, за некоторым исключением, также используется эта символика. В первом издании работ Рамсея [78] его редактор Р. Брейтуэйт для удобства читателя привёл отдельные замечания относительно наиболее важных элементов этой символики. Следуя Брейтуэйту, для удобства читателей мы здесь также приводим эти замечания:

p, q, r используются для *пропозиций*.

a, b, c используются для *индивидов*.

f, g, ϕ, χ, ψ используются для *пропозициональных функций*.

[Пропозициональные функции иногда записываются как $f\hat{x}$, $\psi(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ и т.д., чтобы показать, сколько аргументов им соответствует.]

ϕa [иногда записывается как $\phi(a)$], $\psi(a, b, c)$ и т.д. являются пропозициями.

x, y, z используются для переменных в выражениях следующего типа:

$(x) . \phi(x)$, означающего *Для всех x истинно* $\phi(x)$;

$(\exists x) . \phi(x)$, означающего *Существует x, для которого истинно* $\phi(x)$.

Логические константы:

$\sim$ означает *не*,

$\vee$ означает *или*,

$\supset$ означает *влечёт* [$\supset_x$ означает *влечёт для каждого x*],

$\equiv$ означает *эквивалентно* [$\equiv_x$ означает *эквивалентно для каждого x*].

Другие выражения:

$\hat{x}(\phi x)$ означает *класс* ϕ*-ок*;

$\in$ означает *является членом класса*;

$\subset$ означает *включён в* (отношение между классами);

Nc означает чьё-то *кардинальное число*;

$(\iota x)(\phi x)$ означает *единственная вещь, выполняющая* ϕ;

$\mathbf{E!}(\iota x)(\phi x)$ означает *Одна и только одна вещь выполняет* ϕ;

Точки, **.** **:**, **:.** и т.д. используются вместо скобок;

Вместо $\sim p$ иногда используется $\bar{p}$;

$\iota(a)$ означает *класс, чьим единственным элементом является a*;

$m \equiv n \pmod{l}$ означает *m и n при делении на l имеют один и тот же остаток*;

p/h означает *вероятность пропозиции p при данной пропозиции h*.

1. ПРОГРАММА ЛОГИЦИЗМА, ТЕОРИЯ ВИТГЕНШТЕЙНА И ЗАДАЧА РАМСЕЯ

1.1. Интуиционизм, формализм, логицизм и специфика предложений математики

Статья «Основания математики» (*ОМ*) (1925 г.) была первой крупной работой, опубликованной Рамсеем. В рассмотрении специфики математического знания Рамсей следует общему методу Фреге, Рассела и Уайтхеда, считая, что математика является частью логики. В основаниях математики он относит себя к направлению логицизма в противоположность школам формалистской и интуиционистской. В качестве основы своего исследования он рассматривает фундаментальный труд Рассела и Уайтхеда *Principia Mathematica* (*PM*), поскольку уверен, «что обнаружил, каким образом, используя работу м-ра Людвига Витгенштейна, её можно освободить от серьёзных возражений» [17.С. 16]. Однако прежде чем обратиться собственно к программе логицизма, рассмотрим резоны Рамсея, заставившие его отказаться от других программ обоснования математики.

В *ОМ* Рамсей отвергает интуиционизм Брауэра и Вейля и формализм Д. Гилберта в основном по двум причинам: во-первых, они не соответствуют действительному состоянию математики; во-вторых, они не соответствуют практике применения математики.

Первое касается интуиционизма. Поскольку интуиционисты отказываются от некоторых плодотворных принципов классической логики, таких как закон исключённого третьего, и связанных с ним принципов доказательства, например доказательства от противного, многое из того, что принимается в современной математике, оказывается за бортом. Как считает Рамсей, для этого нет достаточной причины, кроме предубеждений самих интуиционистов, которые претендуют на обоснованность области гораздо более узкой, чем современная математика. Причём эта область к тому же не вполне ясно определена.

Второе относится к формалистскому направлению. Гилберт и его последователи предпочитают концентрироваться на утверждениях математики, рассматривая математические понятия, из которых они состоят, в качестве лишённых смысла значков на бумаге. В этом отношении математические утверждения рассматриваются как последовательности значков, с которыми по определённым правилам разыгрывается некоторая игра. Согласно этим правилам, из одних последовательностей значков выводятся другие последовательности значков. На эту точку зрения Рамсей выдвигает единственный, но убедительный контраргумент. Если, например, ‘2’ есть лишённый смысла значок на бумаге, то каким образом математические понятия могут применяться в повседневной жизни? Ведь в утверждении, что «До станции осталось 2 мили», 2 определённо не является лишённым смысла значком.

Эту аргументацию Рамсей развивает в статье «Математическая логика» (*МЛ*). Относительно интуиционизма Брауэра он утверждает, что тот отказывается от закона исключённого третьего ввиду невозможности его обосновать ни *a priori*, ни *a posteriori*. Действительно, у нас нет априорных оснований утверждать, что высказывание p является истинным или ложным, без того, чтобы утверждать, что либо p – истинно, либо p – ложно, но, установив одну из этих альтернатив, у нас уже нет необходимости утверждать истинность “p или не-p”. Например, Брауэр отказался бы утверждать истинность высказывания «Дождь идёт или дождь не идёт» без того, чтобы выглянуть на улицу. Но как только мы установили истинность или ложность высказывания «Дождь идёт», ненужность предыдущего высказывания становится очевидной. То же самое касается относительно возможности доказательства. Например, относительно числа $2^{\sqrt{2}}$ мы не можем доказать ни его рациональность, ни его иррациональность, поскольку мы не можем привести такие m и n, чтобы $\frac{m}{n} = 2^{\sqrt{2}}$, но мы не можем доказать и то, что такие m и n не существуют. Для Брауэра это свидетельствует о бессмысленности утверждения «Число $2^{\sqrt{2}}$ либо рационально, либо иррационально». Но как считает Рамсей, проблема не решается указанием на то, что число $2^{\sqrt{2}}$ не является ни рациональным, ни иррациональным, поскольку это не даёт нам никакого знания об этом числе.

Относительно закона исключённого третьего Рамсей утверждает:

> хотя очевидно, что затруднительно дать философское объяснение нашему знанию этого закона логики, я не могу убедить себя в том, что с достоверностью не знаю об истинности закона исключённого третьего [18. С. 91].

Здесь, ссылаясь на Аристотеля, он приводит следующий аргумент: даже если считать, что наряду с истинными и ложными высказываниями есть ещё какие-то, скажем сомнительные, высказывания, то вполне можно задать вопрос о том, является ли данное высказывание сомнительным или же нет. Сомнения относительно истинности или ложности ответа на данный вопрос порождают следующий вопрос о сомнительности или несомненности данного ответа и т.д., до бесконечности. Подобная бесконечность свидетельствует в пользу того, что сомнения в обоснованности закона исключённого третьего столь же не обоснованы, как и сам этот закон. Таким образом, даже если в пользу закона исключённого третьего и нет достаточных априорных оснований, то их также нет и против него. Если же учесть, что «Брауэр неспособен оправдать многое из обычной математики» [18, С. 92], то проще принять закон исключённого третьего, нежели от него отказаться.

Сомнения, касающиеся формалистского направления Д. Гилберта, относятся в основном к пониманию того, с чем имеет дело реально работающий математик. С точки зрения формалистов, математика разыгрывает некоторую игру с символами, записанными на бумаге. При этом некоторые последовательности символов рассматриваются в качестве исходных утверждений, или аксиом, из которых, посредством фиксированных правил преобразования (иначе, правил вывода) выводятся новые последовательности символов. При этом правила преобразования рассматриваются как достаточные условия получения того, что заложено в исходных утверждениях. Таким образом, с точки зрения Рамсея, формалистское направление Гилберта сводится к выполнению двух следующих действий: во-первых, необходимо задать, какие последовательности символов являются исходными; во-вторых, необходимо задать правила, посредством которых из исходных последовательностей символов можно получать новые последовательности символов.

Подобные преобразования не выходят за рамки операций со значками, написанными на бумаге. Разыгрываемая игра, по сути дела, представляет собой то, что мы, согласно принятым правилам, можем получить, преобразуя одни последовательности значков в другие. Критерий преобразования значков выводится в этом случае за рамки самой математики в область так называемой метаматематики, которая определяет, какие преобразования приемлемы. Именно метаматематика решает, что та или иная последовательность символов может интерпретироваться как допустимое математическое утверждение. Таким образом, с точки зрения Гилберта, работа математика должна заключаться, во-первых, в том, что он принимает некоторые последовательности символов в качестве исходных утверждений (или аксиом), во-вторых, в том, что он принимает определённые правила преобразования, посредством которых из аксиом можно получать следствия. Работа же метаматематика сводится к тому, чтобы установить, какие аксиомы и правила преобразования допустимы. Здесь главным и, пожалуй, единственным критерием выступает требование непротиворечивости всех возможных построений новых последовательностей символов из исходных последовательностей символов, согласно правилам преобразования, что сводится к невозможности построения символа определённого вида.

Другими словами, если при принятых исходных последовательностях символов и при принятых правилах преобразования исходных последовательностей в новые мы не можем получить символ определённого вида, то математическое доказательство является вполне обоснованным. В метаматематике основное значение приобретает доказательство непротиворечивости, т.е. доказательство невозможности построения символа определённого вида, например $0 \neq 0$. Но остаются вопросы: на каких основаниях последовательности символов определённого вида принимаются за аксиомы и почему некоторые последовательности символов считаются недопустимыми?[1] Как утверждает Рамсей,

> чтобы ни делал математик, он определённо оставляет значки на бумаге, и поэтому эта точка зрения безусловно истинна; но трудно

---

[1] В рукописи, озаглавленной «Формализм», Рамсей более определённо выказывает сомнение в формализме применительно к поставленной перед собой задаче улучшить программу логицизма: «Главная цель метаматематики заключается в том, чтобы доказать, что заданное множество аксиом не может породить противоречие. Математический прогресс состоит: (1) в выведении новых формул из аксиом; (2) в добавлении новых аксиом и доказательстве того, что противоречие не возникает. Поэтому формализм не имеет общего очевидного преимущества в отношении достоверности. Здесь выдвигаемые преимущества связаны с 3 аксиомами: (1) сводимости; (2) мультипликативности; (3) бесконечности, в которых мы не можем быть уверены и в отношении которых было бы интересно получить доказательство, не предполагая, что они не могут привести к противоречию. Такое доказательство могло бы быть задано независимостью значения, но оно не даёт нам аргумента в пользу формализма» [81. С. 184]. Таким образом, Рамсей считает, что доказательство того, что присоединение дополнительных аксиом к исходной системе не приводит к противоречию, конечно, имеет значение, но для их понимания необходимо дополнительное обоснование, выходящее за рамки символических преобразований.

> предположить, что в этом вся истина. Должна быть некоторая причина для выбора аксиом и какая-то причина, по которой особый значок $0 \neq 0$ рассматривается с таким предубеждением [18. С. 95].

Ответ заключается в том, что аксиомы и правила игры со значками задаются таким образом, чтобы противоречие получить было невозможно. Это достигается именно тем, что рассматриваются исключительно значки на бумаге, которые конечны и обозримы. Усомниться можно в значении математических понятий, используемых в реальной работе математика и в повседневной жизни. Но если принять точку зрения формализма, то усомниться в использовании значков нельзя, поскольку значки на бумаге осязаемы и перечислимы. Однако, как считает Рамсей,

> приняв всё это за само собой разумеющееся, всё ещё необходимо спросить, какое предназначение или достоинство заключается в той игре, которую разыгрывают математики, если это действительно игра, а не форма знания. Единственный ответ, который даётся, состоит в том, что некоторые формулы математиков имеют значение или же им можно было бы его придать и что, если эти формулы могут быть доказаны в символической системе, их значение будет истинным [18. С. 96].

Действительно, в повседневной жизни используются не значки на бумаге, а реальное содержание понятий. Например, если у меня есть две собаки и две кошки, я могу сделать вывод, что у меня четыре домашних животных. И здесь ‘2 + 2 = 4’ используется отнюдь не как символическое соглашение, имеющее значение только в рамках определённой игры со значками. Оно указывает на действительное соотношение предметов[1].

Но всё-таки в большей степени возражения Рамсея против интуиционизма и формализма касаются не столько самих их программ обоснования математики, сколько понимания общих и экзистенциальных утверждений.

В рамках интуиционизма основные претензии Рамсея касаются Г. Вейля, который в отличие от Брауэра исповедует ‘умеренный’ интуиционизм, не отказывая в применении закона исключённого

[1] Здесь позиция Рамсея вполне согласуется с критикой Г. Фреге понимания математических преобразований только лишь как преобразований значков, написанных на бумаге: «Символы есть только средство использования – хотя и очень полезное, даже неизбежное, а не его объекты. Эти последние представлены посредством символов» [40. С. 240].

третьего к сингулярным суждениям. В отличие от Брауэра Вейль вряд ли стал бы выглядывать в окно для верификации утверждения «Дождь идёт или дождь не идёт», поскольку считает, что утверждения об единичных предметах или событиях являются истинными или ложными. Сложнее дело обстоит с высказываниями, где употребляются кванторные выражения ‘все’ и ‘существует’. Позиция Вейля связана с критикой процедур перехода от экзистенциальных утверждений к общим и наоборот, которые допускаются в традиционной математике, основанной на классической логике, где, например, доказательство того, что натуральный ряд чисел не обладает некоторым свойством, приводит к утверждению существования числа, не обладающего таким свойством, а доказательство невозможности числа с определённым свойством влечет общие утверждения об отсутствии такого свойства у всего ряда[1]. Таким образом, необоснованным оказывается закон исключённого третьего для общих и экзистенциальных суждений, поскольку в отсутствие конкретного примера необоснованность общих и экзистенциальных утверждений не принимается. Доказать – значит привести пример, при отсутствии такого примера доказательства нет, а значит, нет и возможности утверждать, что оно могло или не могло бы быть. С точки зрения Вейля, «2 есть простое число» – настоящее суждение, имеющее истинностное значение, но, например, «Существуют простые числа» – это утверждение, не имеющее истинностного значения, оно является ‘абстракцией’ суждения, которая указывает направление поиска конкретных примеров. Оно не является истинным или ложным, но представляет собой инструкцию, которой можно воспользоваться. Излагая точку зрения Вейля, Рамсей пишет:

> Общие и экзистенциальные пропозиции на самом деле вообще не являются пропозициями. Если я говорю «2 есть простое число», то это подлинное суждение, утверждающее факт, но если я говорю «Существуют простые числа» или «Все числа являются простыми», то вообще не выражаю суждения… Мы можем сказать «Существует простое число» только тогда, когда мы прежде сказали «Это – простое число» и забыли или предпочли не обращать внимание на то, какое именно число это было. Следовательно, не оправданно говорить «Существует то-то и то-то», если у нас нет программы его дей-

[1] Рамсей имеет в виду работу Вейля «О новом кризисе основ математики» [2], с которой он был хорошо знаком и которая впоследствии послужила значительным основанием изменения его собственных взглядов (подробнее см. ниже гл. 5)

> ствительного поиска. В результате, математика должна быть весьма значительно изменена [18. С. 94].

Значительное изменение математики Рамсей считает неприемлемым. Общие и экзистенциальные утверждения должны трактоваться так, чтобы всё, что достигнуто обыкновенной математикой, оставалось обоснованным и не связывалось бы с затруднениями в применении определённых процедур доказательства.

Аналогичные претензии Рамсей предъявляет формалистской позиции Д. Гилберта. Значки на бумаги не дают действительного утверждения об общности некоторого свойства, поскольку касаются конкретных преобразований на бумаге. Эти преобразования могут относиться только к конкретным числам и не выходят за рамки арифметики. Тогда возникает вопрос: Как возможна алгебра? Гилберт рассматривает переменные, используемые в алгебраических формулах, которыми заменяются конкретные, перечислимые значки на бумаге, в качестве идеалов. Эти идеалы служат заменой значкам. Они, по существу, служат сокращениями для того, что не может быть записано за конечную или обозримую последовательность шагов. Но чем являются такие сокращения? Очевидно, что они не могут заменить подлинных общих или экзистенциальных утверждений, поскольку утверждают о всех или некоторых значках обоснованно в не большей степени, чем кванторные утверждения, использующие выражения ‘все’ и ‘существует’. Кроме того, все преобразования в рамках натурального ряда, хотя и не всегда обозримы, – всегда конечны. Таким образом, оказывается, что алгебра совершенно бесполезна, поскольку сводится к арифметике, вычисляющей значки, записанные на бумаге. Рамсей утверждает:

> Затруднительно видеть, каким образом предполагается использовать эти идеалы, ибо собственно математика, по-видимому, сводится к элементарной арифметике, не допускающей даже алгебры, поскольку сущность алгебры в общих утверждениях. Любое же высказывание арифметики может быть легко проверено или доказано без использования высшей математики, которая, если её существование предполагается только ради простой арифметики, кажется совершенно бесцельной [18, С. 97].

Тем не менее, как считает Рамсей, «явно индивидуальные факты простой арифметики кажутся мне на самом деле общими» [18. С. 99]. Любое утверждение о каком-то предмете уже предполагает возможность экзистенциального обобщения, либо отталкивается от общего закона. Действительно, сингулярное утверждение о том, что у меня есть собака по имени ‘Ральф’ уже ведёт к утверждению с кванторным выражением, что эта собака есть, а значит, вообще есть какие-то собаки. При этом скорее общее утверждение свидетельствует в пользу того, что мы можем привести пример, а не сингулярное утверждение позволяет сделать вывод, что предметы с заданными свойствами существуют. Обратимся к Рамсею:

> Предположение, что общее и экзистенциальное знание существует просто ради индивидуального знания, кажется мне совершенно ложным. В теоретизировании нас в принципе восхищает его общность, и в обыденной жизни вполне достаточно знать, что на неком поле пасётся бык, и нет никакой пользы в том, чтобы, вместо какого-то быка на каком-то поле, знать, что это за бык и где это поле [18. С. 100].

Однако, с точки зрения Рамсея, главное не в том, что по некоторым основаниям интуиционизм и формализм отказываются от того, чтобы считать общие и экзистенциальные утверждения подлинными суждениями, являющимися истинными или ложными, со всеми вытекающими отсюда последствиями, вплоть до отмены закона исключённого третьего. Главное то, что эти сомнения можно преодолеть, используя теорию Витгенштейна.

С помощью теории Витгенштейна Рамсей, как указывалось выше, собирается преодолеть и недостатки логицизма в версии *PM*. Но подобная формулировка цели требует рассмотрения, во-первых, что в основаниях математики Рамсей понимает под логицизмом и, во-вторых, почему подход, сформулированный Расселом и Уайтхедом, вызывает у него серьёзные возражения. Ответ на первый вопрос Рамсей формулирует непосредственно, поскольку, следуя представителям логицизма, считает, что

> логическая школа концентрируется на анализе математических понятий, относительно которых показывается, что они определимы в терминах очень небольшого числа фундаментальных логических понятий. Предпринимая такое рассмотрение понятий математики, они сразу же получают рассмотрение математических пропозиций, а именно, что они являются теми истинными пропозициями, в которых встречаются только математические или логические понятия [17. С. 18].

Таким образом, логицистская программа в основаниях математики сводится для Рамсея к тем же самым задачам, которые в явном виде присутствовали уже у Г. Фреге и наиболее полное выражение получили в формулировке задач, которые Рассел и Уайтхед ставят в *PM*: (1) основополагающие понятия математики должны быть определены с помощью понятий логики; (2) в результате такого переопределения все истины математики должны стать истинами логики[1].

Со вторым вопросом дело обстоит сложнее, поскольку при ответе на него, как считает Рамсей, необходимо выяснить, что считать исходными логическими понятиями и что, в таком случае, рассматривать как логические и математические истины, сформулированные на их основе.

Рассел на этот вопрос даёт следующий ответ: Он считает, что в математике речь идёт не о конкретных предметах, их признаках и отношениях, но о *произвольных* предметах и их возможных *всех* или *каких-то* свойствах и *всех* или *каких-то* отношениях. В этом случае предметы, свойства и отношения представлены переменными; остаются лишь логические константы ‘некоторые’, ‘все’, ‘какой-то’ и т.д. Оперирование переменными и логическими константами Рассел считает основным признаком математической истины, определяя чистую математику как

> класс всех пропозиций формы “*p* влечёт *q*”, где *p* и *q* суть пропозиции, которые содержат одну или более переменных, одинаковых для обеих пропозиций, и ни *p*, и ни *q* не содержат каких-либо констант, кроме логических [82. P. 3].

Таким образом, достаточным признаком математической или логической истины Рассел считает общность формы. То есть специфи-

[1] По этому поводу воспользуемся утверждением П. Бенацеррафа: «Логицизм укладывается в несколько различных версий, каждая со своими новшествами, но большинство из этих версий имеет следующую общую структуру:

1) Истины арифметики *переводимы* в истины логики;

2) (1) демонстрируется тем, что (a) устанавливаются определения для “внелогического” словаря (понятий) арифметики в “сугубо логических” терминах и (b) отмечается, что переводы, санкционированные этими определениями, перевели арифметические истины в логические истины, а арифметически ложные утверждения – в логически ложные;

3) относительно этой арифметической демонстрации затем утверждается, что обоснована аналитичность математических пропозиций, потому что (a) поскольку определения по предположению сохраняют значение, логические переводы имеют то же самое значение, что и арифметические оригиналы и (b) *сами* логические истины мыслятся истинными в силу значения, в данном случае – значений встречающихся в них логических частиц (и, таким образом, аналитическими)» [1. С. 254].

ку математической истины он видит в том, что она относится не к какой-то определённой вещи или классу вещей, но ко всем вещам или каким-то классам вещей. Однако, как утверждает Рамсей:

> Не все такие пропозиции являются пропозициями математики или символической логики. Возьмём, например, 'Любые две вещи различаются по крайней мере тридцатью способами'; это совершенно общая пропозиция, её можно выразить как следствие, включающее только логические константы и переменные, и она вполне могла бы быть истинной. Но никто не может рассматривать её как математическую или логическую истину; она совершенно отлична от такой пропозиции, как 'Любые две вещи в совокупности с любыми другими двумя вещами дают четыре вещи', которая является логической, а не просто эмпирической истиной. В соответствии с нашей философией мы можем провести различие, называя одну случайной, а другую необходимой пропозицией, или же одну – подлинной пропозицией, а другую – просто тавтологией [17. С. 19–20].

Иными словами, для того, чтобы выявить отличительные особенности высказываний логики и математики, необходимо, помимо общности, установить некоторые другие их свойства[1]. Например, утверждения из *PM* вроде бесконечности или аксиомы мультипликативности составлены исключительно из логических терминов и, поэтому, согласно критерию Рассела, являются аналитическими. Однако сомнение в их логической природе как раз и послужило отвержению в среде математиков программы Рассела. Используя терминологию 'подлинная пропозиция' и 'тавтология', Рамсей ориентируется на Витгенштейна, отталкиваясь от идей которого он как раз и пытается улучшить программу логицизма.

---

[1] Надо сказать, что Рассел и сам сомневается в достаточности установленного им признака. В работе «Введение в математическую философию» он, со ссылкой на Витгенштейна, в частности, пишет: «Определение 'логики' или 'математики' следует искать в новом определении старого понятия 'аналитических' суждений. Хотя мы больше не можем быть удовлетворены определением логических суждений как следующих из закона противоречия, мы можем и должны ещё допустить, что они представляют собой класс суждений, полностью отличный от тех, которые мы знаем эмпирически. Все они имеют характеристику, которую мы некоторое время назад назвали 'тавтологичностью'. Она, скомбинированная с фактом, что они могут быть полностью в терминах переменных и логических констант (логическая константа есть нечто, что остаётся постоянным в суждении, даже тогда, когда все его конституенты изменены), даст определение логики или чистой математики. На настоящий момент я не знаю, как определить тавтологию» [25. С. 219].

1.2. Теория Л. Витгенштейна

Теорию, которую имеет в виду Рамсей, Витгенштейн формулирует в своём фундаментальном труде *Логико-философский трактат* (*ЛФТ*)[1]. Если отвлечься от собственно философских следствий этой теории, обращаясь к технической стороне дела, то для Рамсея она, собственно, сводится к следствиям следующих трёх положений[2]:

1. Высказывание характеризуется условиями истинности, т.е. оно может быть истинным и может быть ложным;
2. Высказывания бывают атомарными и неатомарными. Атомарное высказывание не включает логических констант типа ‘если, то’, ‘или’, ‘не’ ‘все’, ‘некоторый’ и т.д., оно состоит исключительно из имён, тогда как неатомарное высказывание включает логические константы;
3. Условия истинности неатомарных высказываний находятся в функциональной зависимости от условий истинности атомарных высказываний.

Достаточно просто проиллюстрировать на примерах два первых положения. Выражения «Сократ – философ», «Сократ мудр», «Сократ не мудр», «Сократ мудр, или Сократ не философ», «Все философы мудрецы», «Некоторые мудрецы – философы» являются высказываниями (пропозициями). При соответствующих условиях они могут быть истинными и могут быть ложными. Но высказывания «Сократ – философ» и «Сократ мудр», при подходящем понимании элементарности признака, являются атомарными, тогда как высказывания «Сократ не мудр», «Сократ мудр, или Сократ не философ» и «Все философы мудрецы» являются неатомарными, поскольку содержат логические константы ‘не’, ‘или’, ‘все’, ‘некоторые’ и т.д.

На третьем положении остановимся несколько подробнее. Согласно третьему положению, условия истинности и ложности неатомарных высказываний зависят от условий истинности и ложности атомарных. Для начала возьмём простейший случай: «Сократ мудр» и «Сократ не мудр». Нетрудно заметить, что при истинности первого высказывания второе всегда будет ложным и наоборот. Если же атомарное высказывание в данном случае обозначить как ‘p’, а отрицание – как ‘$\sim$’, то ‘$\sim p$’ всегда будет иметь условия истинности,

---

[1] Эта теория изложена Витгенштейном в *ЛФТ* параграфы 4.3.–4.5. [4. С. 108–118].

[2] Подробнее см. [28. С. 197–238].

противоположные ‘p’. Рассмотрим теперь высказывание «Сократ мудр, или Сократ – не философ», обозначая «Сократ – философ» как ‘q’, а ‘или’ как ‘$\vee$’, тогда само высказывание запишется как ‘$p \vee \sim q$’. Его условия истинности зависят от условий истинности ‘p’ и ‘q’ и от того способа, которым они соединены. Высказывание ‘$p \vee \sim q$’ будет истинным для одних условий истинности ‘p’ и ‘q’, и ложным для других. Подразумевая обычный смысл за знаком ‘$\vee$’, нетрудно заметить, что выражение ‘$p \vee \sim q$’ означает «‘p’ – истинно, или ‘q’ – ложно». Т.е. в наших обозначениях это означает, что «‘Сократ мудр’ – истинно, или ‘Сократ – не философ’ – ложно».

Этот подход нетрудно обобщить для произвольных высказываний. Пусть p, q, r … – атомарные высказывания, каждому из которых соответствуют два условия истинности. Любое неатомарное высказывание, построенное из n атомарных высказываний, должно учитывать 2^n истинностных возможностей, при которых оно может быть истинным и может быть ложным, поскольку необходимо учитывать все возможные комбинации условий истинности атомарных высказываний. Последнее легко представить в виде разработанных Витгенштейном таблиц истинности. Так, например, истинностные возможности неатомарного высказывания, построенного из 2 атомарных, будут выглядеть следующим образом:

Таблица 1

p	q
И	*И*
И	*Л*
Л	*И*
Л	*Л*

(здесь *И* и *Л* обозначают истину и ложь соответственно, а каждая строка таблицы указывает на одну из возможностей). То есть p может быть истинным, и q может быть истинным; p может быть ложным, а q – истинным, и т.д. При установлении условий истинности неатомарного высказывания следует учитывать, что одни истинностные возможности могут быть реализованы, а другие – нет. К примеру, приведённое выше высказывание ‘$p \vee \sim q$’ реализует первую, третью и четвёртую из указанных возможностей, отвергая вторую. Если представить это в виде таблицы, обозначая напротив соответствующих строк принятие возможности как *И*, а отвержение – как *Л*, то условия истинности данного неатомарного высказывания примут следующий вид:

Таблица 2

p	*q*	
И	*И*	*И*
Л	*И*	*Л*
И	*Л*	*И*
Л	*Л*	*И*

Таким образом, условия истинности неатомарных высказываний находятся в функциональной зависимости от истинностных возможностей, предоставляемых им атомарными высказываниями, из которых они построены. Функции, которые устанавливают такое согласование, Витгенштейн называет функциями истинности.

Отвлечёмся теперь от приведённого примера. Если p и q задать произвольно, то для построенного из них неатомарного высказывания можно задать все возможные функции истинности, которые при согласовании отбирают истину для одних возможностей и ложь для других. В этом случае выборки будут находиться в спектре от отбора истины для всех возможностей до отбора для всех возможностей лжи. Для двух атомарных высказываний p и q это можно выразить в следующей таблице, где каждый столбец указывает на одну из возможных выборок согласования (т.е. представляет собой один из возможных столбцов, который мы могли бы построить для предыдущей таблицы):

Таблица 3

1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*	*14*	*15*	*16*
И	*И*	*И*	*И*	*И*	*И*	*И*	*И*	*Л*	*Л*	*Л*	*Л*	*Л*	*Л*	*Л*	*Л*
И	*И*	*И*	*И*	*Л*	*Л*	*Л*	*Л*	*И*	*И*	*И*	*И*	*Л*	*Л*	*Л*	*Л*
И	*И*	*Л*	*Л*	*И*	*И*	*Л*	*Л*	*И*	*И*	*Л*	*Л*	*И*	*И*	*Л*	*Л*
И	*Л*	*И*	*Л*	*И*	*Л*	*И*	*Л*	*И*	*Л*	*И*	*Л*	*И*	*Л*	*И*	*Л*

Двум атомарным высказываниям соответствуют 16 возможных функций истинности, определяющих условия истинности неатомарных высказываний. Подобный подход нетрудно распространить на произвольное число атомарных высказываний. Как уже говорилось, при n атомарных высказываниях число истинностных возможностей равно 2^n. Тогда число выборок условий истинности построенных из них неатомарных высказываний, заданных всеми возможными функциями истинности, равно 2^{2^n}. Если *n* равно 2, как в примере с последней таблицей, тогда возможных выборок будет 16, если *n* равно 3, тогда возможных выборок будет 64 и т.д.

Отметим, что подобный подход распространялся пока только на те неатомарные высказывания, где *n* было заранее заданным, конечным числом. Это связано со спецификой рассматриваемых до сих пор логических союзов, которые их связывают. Действительно, ‘или’, ‘не’, ‘и’ (или символически ‘$\vee$”, ‘$\sim$’, ‘$\cdot$’ соответственно) всегда относятся к конечному числу атомарных высказываний, объединяя их в неатомарные высказывания. Подобный подход к неатомарным высказываниям, затрагивающий конечное число атомарных высказываний, не является новацией Витгенштейна, он использовался уже Г. Фреге [41, С. 71–78.], но главной заслугой Витгенштейна Рамсей считает то, что он

> осознал, что если мы принимаем такое рассмотрение истинностных функций как выражение согласования или несогласования с истинностными возможностями, то нет причин, по которым аргументы истинностных функций не являлись бы бесконечными по числу [17. С. 23].

От себя мы добавим, что в данном случае речь может идти не только о ‘бесконечных по числу’, но даже просто о необозримых или неизвестных конечных числах атомарных высказываний. Возьмём, к примеру, высказывание «Все философы мудрецы». Очевидно, во-первых, что оно не является атомарным, поскольку не содержит имён индивидов, а указывает на их некоторую совокупность. Во-вторых, эта совокупность может быть как конечной, так и бесконечной. Поэтому, можно говорить, что здесь неизвестность объёма данной совокупности уравнивает подход к конечным и бесконечным множествам предметов. Но как подходить к подобного рода высказываниям? С точки зрения логики ключевым здесь является слово ‘все’, поскольку оно не относится к содержательным особенностям данного высказывания, но характеризует формальную связь элементов его содержания. Таким образом, анализ подобных высказываний сводится к анализу функционирования слов ‘все’ и ‘некоторые’.

Начнём с атомарного высказывания «Сократ – философ» и обратим внимание на присутствующее здесь имя ‘Сократ’. Нетрудно заметить, что это имя мы можем заменить другим, например, ‘Платон’, в этом случае получится высказывание «Платон – философ». В таком случае место, на котором стоит имя ‘Сократ’, можно заменить переменной, получив выражение ‘x – философ’. С точки зрения Витгенштейна, это выражение является функцией, областью определения которой является множество высказываний, в которых переменная заменена именами. Так, областью определения функции ‘x – философ’ являются высказывания «Сократ – философ», «Платон – философ», «Алкивиад – философ» и т.д. Областью значения данной функции выступают истинность и ложность атомарных высказываний. При таком подходе функция ‘x – философ’ согласует с атомарными высказываниями «Сократ – философ» и «Платон – философ» значение ‘истина’, а с атомарным высказыванием «Алкивиад – философ» – значение ‘ложь’.

Следуя Рамсею, выражения типа ‘x – философ’ будем называть пропозициональными функциями и обозначать как ‘fx’. Тогда, областью определения такой пропозициональной функции будет множество атомарных высказываний вида ‘fa’, ‘fb’, ‘fc’ и т.д. (где ‘a’ ‘b’ ‘c’ и т.д. суть имена индивидов). Нетрудно заметить, что этому множеству атомарных высказываний будет соответствовать множество их возможностей истинности, которое по числу будет 2^n (при этом неважно, конечно и известно n, не известно или бесконечно). С возможностями истинности атомарных высказываний можно сопоставить их согласования или несогласования с условиями истинности неатомарных высказываний, метод построения которых предлагает Витгенштейн. Здесь уже не годятся выражения связи известного конечного числа атомарных высказываний типа ‘или’, ‘не’, ‘и’. Согласованность или несогласованность в данном случае выражают фразы ‘все’ и ‘некоторые’, которые в условиях неопределённости числа n указывают, берётся ли вся область определения пропозициональной функции или какая-то её часть. Используя символические выражения ‘$(x)\ .\ fx$’ и ‘$(\exists x)\ .\ fx$’, мы можем указать, что все или некоторые высказывания, построенные в соответствии с пропозициональной функцией ‘fx’, являются истинными. Другими словами, высказывание вида ‘$(x)\ .\ fx$’ будет истинным, если будут истинными все высказывания вида ‘fa’, ‘fb’, ‘fc’, а высказывание вида ‘$(\exists x)\ .\ fx$’ будет истинным, если будет истинным хотя бы одно из высказываний вида ‘fa’, ‘fb’, ‘fc’.

В этом отношении выражения общности 'все' и 'некоторые' можно соотнести с конъюнкцией и дизъюнкцией, т.е. с выражениями 'и' и 'или', поскольку согласованность и несогласованность истинностных возможностей высказывания '$(x) \,.\, fx$' соответствует такому согласованию для высказывания '$fa \cdot fb \cdot fc \cdot \ldots$', а согласованность и несогласованность истинностных возможностей высказывания '$(\exists x).\, fx$' будет соответствовать такому согласованию для высказывания '$fa \vee fb \vee fc \vee \ldots$', так как истинными они будут при одних и тех же условиях.

Нетрудно заметить, что подобный подход можно распространить на случаи, где пропозициональная функция включает более чем одну переменную или с помощью логических союзов комбинируется с другими пропозициональными функциями, как, например, в приведённом выше примере «Все философы мудрецы», который должен рассматриваться как комбинация утверждения общности и условной связи и формально представляться следующим образом: '$(x) \,.\, fx \supset qx$'[1]. Главное следствие подобного анализа состоит в том, что выражения общности можно уподобить логическим союзам. Распределение истинностных возможностей первых будет точно таким же, как и у вторых, и простираться от согласования всех их выборок до несогласования ни одной из них. Т.е. для любого неатомарного высказывания типа '$(x) \,.\, fx$' будет 2^n истинностных возможностей для n атомарных высказываний вида 'fa', 'fb', 'fc' и т.д. и 2^{2^n} возможностей их согласования и несогласования, которые распределяются точно так же, как в табл. 3.

Из распределения согласований и несогласований наибольший интерес вызывают первый и последний случай, т.е. когда согласуются все выборки возможностей истинности и не согласуется ни одна (для табл. 3 – это первый и последний столбец). Эти случаи Витгенштейн называет тавтологией и противоречием соответственно. Таким образом, тавтология – это неатомарное высказывание, кото-

[1] Этот подход вполне согласуется с точкой зрения Рассела, выраженной в статье «Математическая логика, основанная на теории типов», на подобные утверждения общности: «Поскольку все люди смертны, то какой-то *ложной* пропозиции, являющейся значением функции 'Если x – человек, то x - смертен', быть не может. Ибо, если она вообще является пропозицией, условие 'x – человек' должно быть пропозицией, таковой должно быть и следствие 'x – смертен'. Но если условие – ложно, то условное высказывание истинно; а если данное условие истинно, то это условное высказывание – истинно. Следовательно, ложной пропозиции формы 'Если x – человек, то x – смертен' быть не может» [27. С. 34].

рое истинно при любых возможностях истинности составляющих его атомарных высказываний, а противоречие – это неатомарное высказывание, которое при любых возможностях истинности – ложно. Тавтологии и противоречия могут быть любого вида. Например, ‘$p \vee {\sim}p$’ и ‘$(x) \,.\, \phi x : \supset : \phi a$’ – тавтологии, а ‘$(p \cdot {\sim}p)$’, ‘$\sim .\, (\exists x) \,.\, \phi x : \phi a$’ – противоречия[1]. Конечно, выражения типа ‘$p \vee q$’ указывают на конечное число атомарных высказываний, а выражения типа ‘$(x). fx$’– на бесконечное. Но анализ одинаков, одинаковы и следствия. Суть тавтологий и противоречий от этого не изменится. Тавтологии и противоречия могут быть какой угодно степени сложности, важно лишь то, что метод Витгенштейна в принципе позволяет опознать их как тавтологии и противоречия. Тавтологии и противоречия тесно связаны, поскольку, отрицая одно, мы получаем другое и наоборот.

Особенность истинностной оценки тавтологий и противоречий приводит Витгенштейна к тому, что он не считает их подлинными высказываниями. Подлинное высказывание, согласуя или не согласуя свои истинностные возможности, нечто утверждает о реальности, тогда как тавтологии и противоречия, которые истинны или ложны при любых условиях, ничего не говорят о реальности, но являются частью символической системы. С этим согласен и Рамсей:

> Подлинная пропозиция нечто утверждает о реальности, и она является истинной, если реальность такова, как утверждается. Но тавтология – это символ, сконструированный с тем, чтобы ничего не говорить о реальности, но выражать полное неведение, согласуясь с любой возможностью [17. С. 27].

Именно тавтологии и противоречия Витгенштейн, и вслед за ним Рамсей, рассматривает как предложения логики. Если, согласуясь с традицией Лейбница и Канта, утверждения логики считать аналитическими, то их смысл состоит как раз в том, что они не имеют отношения к действительности, их истинность или ложность обосновывается через них самих. Таким образом, понятие ‘тавтология’ получает чётко определённый смысл. Но теория Витгенштейна, используемая для решения затруднений, возникающих в структуре *PM*, важна для Рамсея как минимум ещё в двух отношениях:

---

[1] Здесь и далее используется символика, принятая в *PM*, которую употребляет Рамсей и объяснение которой дано во *Введении*. Исключение составляют цитаты современных авторов, символика которых без труда переводима в символику *PM*.

1. Способ построения функций истинности, согласующих истинностные возможности атомарных высказываний в рамках неатомарных, могут быть построены и выражены разными способами. Вернёмся, например, к табл. 2. Представленная в ней функция согласования соответствовала выражению ‘$p \vee \sim q$’. Однако то же самое согласование можно выразить с помощью ‘$\sim(p \cdot \sim q)$’, поскольку и то, и другое выражения истинны, когда p – истинно, или q – ложно. То же самое относится к высказываниям, включающим общность указания. Например, одному и тому же согласованию будут соответствовать выражения ‘$\sim (x) . fx$’ и ‘$(\exists x) . \sim fx$’. Отсюда вытекает, что необходимо различать само выражение и то, что оно выражает. Рамсей утверждает, что

> два пропозициональных символа должны рассматриваться как примеры одной и той же пропозиции – а именно, когда они выражают согласование и несогласование с одним и тем же множеством истинностных возможностей атомарных пропозиций [17. С. 25].

2. Теория Витгенштейна позволяет объяснить, почему тавтологии и противоречия обычно приравниваются к подлинным высказываниям. Рамсей считает, что

> ассимиляция тавтологий и противоречий к истинным и ложным пропозициям соответственно вытекает из того факта, что тавтологии и противоречия могут рассматриваться в качестве аргументов истинностных функций так же, как обычные пропозиции, а при определении истинности или ложности истинностной функции тавтологии и противоречия среди её аргументов должны считаться за истинные и ложные соответственно [17. С. 27].

Однако конъюнктивное присоединение тавтологии к любому высказыванию не меняет условий его согласования. В этом смысле тавтологии при описании реальности являются излишними, поскольку, если ‘t’ – тавтология, то ‘t и p’ суть то же самое, что и ‘p’. Тавтологии и противоречия могут функционировать в структуре выражения неатомарных высказываний, но они оказывают иное воздействие на условия истинности, чем подлинные высказывания.

Эти два положения оказываются важными при трансформации некоторых утверждений из *PM*, и к ним мы вернёмся ниже. Пока же остановимся на понятии ‘тавтология’, охарактеризовав с его помощью задачу, стоящую перед Рамсеем.

1.3. Задача Рамсея

Следуя Витгенштейну, Рамсей считает, что все высказывания, имеющие характер логических истин, являются тавтологиями. Именно признаком тавтологичности следует дополнить предложения математики, чтобы обосновать программу логицизма. Действительно, ни Г. Фреге, ни Б. Рассел, указав необходимый критерий математических истин, их обобщённость, не установили критерий достаточный, без которого вся программа логицизма повисает в воздухе. Важность этого критерия связана ещё и с тем, что другие, отличные от логицизма направления в основаниях математики, в отсутствие критерия достаточности не принимали некоторые положения *PM*, сомневаясь в их логическом характере. Рамсей выдвигает в качестве достаточного критерия свойство тавтологичности в смысле Витгенштейна и утверждает, что к существу математических пропозиций относится то, что «их содержание должно быть совершенно обобщённым, а их форма – тавтологичной» [17. С. 21]. Другими словами, «адекватную теорию мы можем получить, только рассматривая математику как составленную из тавтологичных обобщений» [17. С. 21]. Поэтому реабилитация программы логицизма состоит для Рамсея как раз в том, чтобы все обобщённые предложения, принятые в качестве исходных Расселом, либо трактовать как тавтологии в смысле Витгенштейна, либо удалить их как не соответствующие критерию достаточности[1].

[1] Р. Карнап, рассматривая историю становления программы логицизма [48. Р. 31–41), различает два тезиса логицизма: тезис определимости и тезис доказуемости. Математика сводима к логике в смысле первого тезиса, если все понятия математики посредством явных определений могут быть выведены из понятий логики (в частности, понятие числа должно быть определено в рамках логической системы только с использованием логических союзов, кванторов и равенства). Реализация тезиса доказуемости должна привести к тому, что, при условии выполнения первого тезиса, все теоремы арифметики выводимы из аксиом логики с использованием стандартных логических процедур. Р. Карнап утверждает, что Фреге и Рассел понимали программу логицизма в смысле выполнимости первого тезиса. И только Рамсей, с точки зрения поставленной им задачи дополнить признак полной обобщённости предложений математики признаком их тавтологичности, по сути дела уже предвосхитил, как считает Карнап, его дистинкцию, осознав недостаточность выполнения первого тезиса. Ср. также и утверждение Санду: «Для Рамсея логицистская программа, которая редуцирует математику к классу пропозиций, содержащих только константы (включая равенство), но не показывает, что эти пропозиции являются тавтологиями, останавливаются на полпути, поскольку она показывает только то, что математические высказывания предполагают полную *общность*, не показывая, однако, что они предполагают полную *необходимость*. В этом случае правильно сказать, что дистинкция

Если обратиться к структуре *PM*, то нетавтологичными обобщениями здесь представляются три аксиомы: *Сводимости*, *Бесконечности* и *Мультипликативности*. Все эти положения, являясь совершенно общими, не удовлетворяют принципу тавтологичности и, следовательно, не могут претендовать на статус положений логики. Действительно, если исходить из того, что логика, к которой сводима математика, отличается тавтологичностью содержания, то эти положения могут претендовать только на обобщение эмпирических фактов. Именно эти три положения вызывают сомнение в своей логической природе у критиков логицизма, да и, как можно судить по некоторым высказыванием, у самого Рассела, поскольку предполагают существование вещей[1].

Реабилитация программы логицизма по существу связана именно с этими тремя положениями. Если это так, то перед Рамсеем встаёт альтернатива: либо в структуре логики и математики они излишни, либо они должны быть переинтерпретированы таким образом, чтобы их можно было трактовать как тавтологии. Первую альтернативу Рамсей избирает для аксиомы сводимости, вторую – для аксиом мультипликативности и бесконечности.

Возникает, однако, вопрос, почему в структуре *PM* эти три положения в принятой в этом труде формулировке оказались вполне совместимыми с логицизмом? Рамсей связывает это с тремя принципиальными недостатками *PM*:

1. Затруднения с преодолением противоречий, все из которых Рассел связывает с так называемым ‘принципом порочного круга’.

2. Неадекватная трактовка экстенсиональности математики, основанная на допущении только определимых классов. В *PM* даётся «определение класса, которое применяется только к определяемым классам, так что все математические пропозиции о некоторых или всех классах истолковываются неправильно» [17, С. 42].

Карнапа между двумя видами редукции математики к логике отзывается эхом в более ранней дистинкции Рамсея между теми математическими высказываниями, которые обладают полной общностью, и теми, которые являются необходимыми. С оглядкой на эту дистинкцию мы можем сказать, что существенная часть работы Рамсея в основаниях математики состояла в том, чтобы улучшить систему *Principia* так, чтобы она сохранила только те аксиомы, которые являются тавтологиями (в смысле Витгенштейна)» [86. P. 238].

[1] В книге «Введение в математическую философию» Рассел, в частности, пишет: «Примитивные суждения в *Principia Mathematica* таковы, чтобы был возможен вывод о существовании по крайней мере одного индивида. Но сейчас я рассматриваю это как дефект логической чистоты» [25. С. 218].

3. Неправильная трактовка тождества (равенства), используемого при определении классов. В качестве определения тождества Рассел принимает тождественность неразличимых, но «данное определение интерпретируется неверно, поскольку оно не определяет тот смысл, в котором действительно используется символ тождества» [17. С. 50].

Эти три недостатка тесно взаимосвязаны, но, как показывает Рамсей, можно установить их соответствие с указанными выше аксиомами. Преодоление противоречий в рамках разветвлённой теории типов приводит к необходимости введения аксиомы сводимости, истинность которой нет причин предполагать, поскольку «если бы она и была истинной, то это было бы счастливой случайностью, а не логической необходимостью, ибо она не является тавтологией» [17. С. 47]. Неправильная трактовка экстенсиональной установки математики приводит к специфическому пониманию аксиомы мультипликативности:

> Это неверное понимание не просто вызывает возражение, когда рассматривается само по себе, оно особенно пагубно в связи с аксиомой мультипликативности, которая при надлежащей интерпретации является тавтологией, но при неверном понимании, на манер *Principia Mathematica*, становится значимой эмпирической пропозицией, истинность которой нет причин предполагать [17. С. 42].

Наконец, трактовка тождества приводит к эмпирическому пониманию аксиомы бесконечности, ибо

> как ошибочное определение классов особенно неудачно в связи с аксиомой мультипликативности, так и ошибочное определение тождества особенно вводит в заблуждение в связи с аксиомой бесконечности» [17. С. 52].

Устранение этих трёх недостатков должно привести к корректировке программы логицизма, согласовав его с достаточным критерием, полученным из теории тавтологий Витгенштейна.

Но прежде, чем обратиться к новациям Рамсея, рассмотрим некоторые особенности логицистской программы в основаниях математики в том виде, в котором она представлена в *PM*, особое внимание уделяя тем её моментам, которые вызывают сомнение в логической природе её основоположений.

1.4. Логицизм *PRINCIPIA MATHEMATICA*

1.4.1. *Определение натурального числа у Г. Фреге*

Как указывалось выше, начальный пункт программы логицизма заключается в определении терминов математики в терминах логики. В общих чертах эту задачу попытался осуществить Г. Фреге, сводя основное понятие математики, понятие целого положительного числа, к категориям логики [40]. Он отказывается от натуралистической и психологической трактовки чисел, резко критикуя представления о том, что числа являются свойством вещей реального мира или характеристикой субъективных психологических представлений. Действительно, когда мы говорим, например, что у Марса есть два спутника, мы не имеем в виду, что двойка – это какая-то их реальная характеристика, наподобие формы, размера или массы. Физические свойства спутников вполне могли бы измениться, но при этом их всё равно осталось бы два. Число не является физическим свойством, он не изменяется с изменением последних. Оно вообще не является свойством в обычном смысле, например, в том смысле, в котором свойством является цвет. Можно говорить, что у спутников Марса одинаковый или разный цвет, но вряд ли можно говорить, что у них одинаковое или разное число.

В ещё меньшей степени можно считать числа характеристикой субъективных представлений. Действительно, мы можем рассматривать Марс и его спутники как три небесных тела, а можем рассматривать как систему тел, состоящую из двух элементов, планеты и её сателлитов. Но это столь же мало характеризует наши представления, как и сами небесные тела. Поскольку, если бы это было так, у каждого было бы своё представление о числе, и никакой объективный счёт был бы невозможен.

Фреге считает, что, когда мы говорим о двух спутниках Марса, мы имеем в виду, что под понятие ‘число спутников Марса‘ подпадает ровно два предмета или, что то же самое, объему понятия ‘число спутников Марса’ принадлежит ровно два предмета. Таким образом, он предлагает рассматривать числа как характеристики понятий, которые, в его понимании, хотя и не являются предметами реального мира, обладают достаточной степенью объективности, поскольку не составляют содержание психической жизни отдельного человека, но являются достоянием многих.

Определение числа в качестве свойства определённых понятий Фреге осуществляет в два этапа. Во-первых, необходимо дать общее определение числа, и, во-вторых, на его основе следует дать определение конкретных чисел, по возможности сохранив основные свойства натурального ряда. Начнём с первого. Нетрудно заметить, что разные понятия могут характеризоваться одним и тем же числом. Например, понятию 'Афинские тираноубийцы' соответствует то же самое число, что и понятию 'спутники Марса', а именно, 2. Такие понятия Фреге называет равночисленными. В общем случае равночисленными называются понятия, объёмы которых находятся во взаимно однозначном отношении.

Фреге считает, что понятие равночисленности более фундаментально, чем понятие числа, и именно, отталкиваясь от равночисленности, его нужно определять. Это следует из того факта, что равночисленность понятий мы можем устанавливать, не имея никакого представления о конкретном числе. Например, мы можем не знать, сколько в конечном счёте на приёме будет гостей, но при этом вполне быть уверены, что столовых приборов окажется ровно столько же. Таким образом, в этом случае понятия 'гости' и 'столовые приборы' оказываются равночисленными.

Равночисленность характеризует не только два понятия. Равночисленными являются все понятия, объёмы которых находятся во взаимно однозначном отношении. В этом отношении равночисленность задаёт выделенные непересекающиеся совокупности понятий. На этом основании уже можно ввести общее определение числа: Число – это то, что соответствует объёму равночисленных понятий. Приведём определение самого Фреге:

> Теперь мы можем дать следующее определение:
>
> Выражение «Понятие F равночисленно понятию G» равнозначно выражению «Существует отношение ϕ, которое взаимно однозначно соотносит предметы, подпадающие под понятие F, с предметами, подпадающими под понятие G».
>
> Я повторю:
>
> Число, соответствующее понятию F, есть объём понятия 'равночисленно понятию F',
>
> и добавлю:
>
> Выражение «n есть число» равнозначно выражению «Существует понятие такое, что n есть соответствующее ему число».
>
> Понятие числа, таким образом, объяснено [40. С. 208].

Таким образом, мы получили общее определение числа. Остаётся на его основании сформировать понятия конкретных чисел.

Здесь можно было бы действовать следующим образом. Для каждой совокупности выделить какое-то одно понятие и говорить о том, что конкретное число соответствует понятию ‘понятия, равночисленные с этим выделенным понятием’. Например, число 2 в этом случае можно было определить как то, что соответствует понятию ‘понятия, равночисленные понятию *спутники Марса*’. Но такое определение было бы эмпирическим, а потому бесполезным для целей математики, поскольку зависело бы от действительного существования подпадающих под такие понятия предметов. Если же при определении математических понятий мы ориентируемся на логику, чьё содержание, как считает Г. Фреге, образуют аналитические, а не синтетические суждения, то определения должны вводиться так, чтобы никоим образом не зависеть от реального состояния дел. Поэтому следует найти такие понятия, которые, при приписывании им конкретных чисел, не требовали бы обращения к содержанию реального мира. Тогда, если такие понятия введены чисто аналитически, любое число должно определять совокупность равночисленных им понятий.

Для начал нужно определить 0. С точки зрения Фреге, для этого подошло бы любое пустое понятие. Но поскольку оно должно вводиться аналитически, в качестве такового он выбирает понятие ‘неравное себе’. Действительно, суждение ‘$a = a$’ в рамках традиционной логики (например, у Лейбница и Канта) всегда рассматривалось как аналитическое суждение. И наоборот, нарушение закона тождества служило основанием применения принципа непротиворечия, что служило обоснованием аналитических суждений. Таким образом, принимая для равенства определение Лейбница, которое сводится к отождествлению неразличимых, если мы возьмём понятие ‘неравное себе’, то оно окажется аналитически пустым; под это понятие по логическим основаниям не подпадает ни один предмет, т.е. оно имеет логически пустой объём. И мы получаем чисто аналитическое определение 0. Как пишет Фреге:

> Поскольку под понятие ‘неравное себе’ ничего не подпадает, я объясняю: 0 – это число, соответствующее понятию ‘неравное себе’ [40. С. 210].

Теперь чисто аналитически можно перейти к определению числа 1. У нас уже есть число 0, которое соответствует понятию ‘неравное себе’. Если теперь взять понятие ‘равно 0’, то под него подпадет как раз один-единственный предмет, а именно, сам 0. Таким образом, мы получаем число 1 как число, соответствующее понятию ‘равное 0’. Помимо того, что мы получили число 1, нетрудно заметить, что предложенный способ его получения прямо приводит к тому, что число 1 непосредственно в ряду чисел следует за 0, а сам 0 есть начало ряда. Теперь, поскольку начало ряда есть и показано, каким образом из него можно получить число, непосредственно следующее за ним, достаточно задать общую процедуру того, как из предшествующего числа получить число, непосредственно следующее за ним в ряду. Фреге предлагает:

> Для доказательства того, что в натуральном ряду чисел за каждым числом *n* непосредственно следует число, необходимо предъявить понятие, которому соответствует предыдущее число. В качестве такового мы выбираем: ‘принадлежащий натуральному ряду чисел, оканчивающемуся на *n*’ [40. С. 214].

При таком подходе по каждому заданному числу можно определить число, непосредственно следующее за ним. Допустим, нам нужно определить число, непосредственно следующее за числом 1. Согласно приведённому определению, таким число будет число, соответствующее понятию, с помощью которого определён ряд, заканчивающийся на 1. В этом ряду уже заданы числа 0 и 1, следовательно, данному понятию будет соответствовать число 2, поскольку оно будет задавать понятие, равночисленное понятию, под которое подпадают 0 и 1. Согласно приведённым определениям, это будет понятие,‘равное 1’. Поскольку 1 – это число, соответствующее понятию ‘равное 0’, а 0 – это число, соответствующее понятию ‘неравное себе’, то число 2 – это понятие «равное “равное ‘неравное себе’”». Ряду, заканчивающемуся здесь на 2, принадлежат 0 и 1, причём 2 есть число, непосредственно следующее за 1. Та же самая последовательность шагов относится к числу, следующему за 2 и т.д. Эта индуктивная процедура может быть продолжена сколь угодно долго, применяясь к любому *n*, а, значит, она задаёт любое число натурального ряда.

При этом нетрудно заметить, что данная процедура сохраняет основные свойства, которые требуются от натурального ряда чисел: во-первых, 0 – есть число, которое непосредственно не следует ни за каким другим числом; во-вторых, за каждым числом не может следовать оно само; в-третьих, за каждым числом, которое в натуральном ряду следует за 0, непосредственно следует какое-то и только одно число. Отсюда вытекает следующее определение: «Предложение “*n* принадлежит натуральному ряду чисел, начинающемуся с 0” равнозначно с “*n* – есть конечное число” [40. С. 218]. При этом добавим, что *n* может быть сколь угодно большим, возможно, не достижимым за конечное число шагов. Главное в том, что предложенная индуктивная процедура позволяет определить все числа натурального ряда, обращаясь только к понятиям логики.

Здесь следует сделать одно уточнение. С точки зрения *PM* определение понятия числа у Фреге можно трактовать двояко: интенсионально и экстенсионально, поскольку понятия Фреге рассматривает как одноместные функции, а соответствующие им объёмы – как классы некоторых предметов.

С одной стороны, Фреге, развивая свой подход, рассматривает понятия как одноместные функции, областью определения которых являются элементы произвольной природы, а областью значения истина и ложь [42]. В этом случае, например, понятие ‘спутник Марса’ выражает функцию ‘*x* – спутник Марса’, где для определённых значений *x* высказывания ‘*a* – спутник Марса’, ‘*b* – спутник Марса’ и т.д. будут истинными, а для других ложными. Объём понятия ‘спутник Марса’ в этом случае будут образовывать те предметы, которым функция ‘*x* – спутник Марса’ сопоставляет значение ‘истина’. Если подобного рода функцию представить в виде *fx*, то можно сказать, что некоторой функции *gx*, соответствует то же самое число, когда области определения *fx* и *gx* находятся во взаимно однозначном соответствии (т.е. во взаимно однозначном соответствии находятся именно те совокупности предметов, которым данные функции сопоставляют значение истина).

При таком подходе функция, которой соответствует 0, будет выражать свойство ‘$x \neq x$’, поскольку область определения данной функции, очевидно, пуста, так как любой индивид равен самому себе. Область определения функции, которой соответствует число 1, будет состоять из функции, которой соответствует число 0 и т.д. Подобная интенсиональная трактовка определения числа допускает функции, выражающие свойства индивидов, функции, выражающие свойства свойств индивидов и т.д., до бесконечности.

С другой стороны, при экстенсиональной трактовке классы, или объёмы понятий, не обязательно задавать через функцию, выражающую определённое свойство. Достаточно того, что элементы одного класса мы можем поставить во взаимно однозначное соответствие с элементами другого класса. Например, следующим образом: Если у нас есть класс $\{a, b, c\}$ и класс $\{\alpha, \beta, \gamma\}$, где a, b, c, α, β, γ – элементы произвольной природы, то эти классы имеют одно и то же число, поскольку мы можем взаимно однозначно сопоставить их элементы, скажем, так: a с α, b с β и c с γ. Этот подход нетрудно также распространить на классы со сколь угодно большим количеством элементов. Производность природы здесь не имеет никакого значения, главное, что они образуют объём некоторого понятия.

При таком подходе совсем нетрудно задать класс, которому соответствовало бы число 0. Это – пустой класс, в который не входит ни один объект, или символически $\varnothing$. Этот класс можно было бы задать любым противоречивым свойством. Число данного класса было бы равно числу любого пустого класса, т.е. все пустые классы были бы ему равночисленны. Далее, раз у нас есть $\varnothing$, мы можем образовать класс, состоящий из этого элемента, т.е. $\{\varnothing\}$, и этот класс задаёт число, которое соответствует всем тем классам, которые ему равночисленны, а именно, число 1. Из уже имеющихся элементов $\varnothing$ и $\{\varnothing\}$ образуется следующий класс: $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$, взаимно однозначное соответствие с которым образует следующее в ряду число 2 (следование в ряду здесь вполне соответствует определению Фреге, поскольку каждое предшествующее в ряде число принадлежит в качестве элемента последующему числу). Эту процедуру нетрудно продолжить, и в результате мы получаем ряд: $\varnothing$, $\{\varnothing\}$, $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$, $\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$... В этом случае мы получаем определения чисел, которые не зависят от эмпирических характеристик классов, находящихся во взаимно однозначном соответствии, но основываются исключительно на аналитическом положении о существования класса, которому не принадлежит ни один элемент.

Отметим, что и интенсиональная, и экстенсиональная трактовка определения числа у Фреге сохраняют все свойства, обычно приписываемые натуральному числовому ряду, о которых говорилось выше.

Свой подход к определению математических понятий Г. Фреге, безотносительно к интенсиональной или экстенсиональной трактовке определения понятия числа, полностью оформляет в двухтомном труде «Основные законы арифметики» [59]. И такой способ определения числа и числового ряда представляется вполне естественным, если бы не одно ‘но’. Оказалось, что подход Фреге не свободен от противоречий.

Прежде, чем перейти к противоречиям, обратим внимание на одну особенность фрегеанского способа рассмотрения понятий при определении чисел натурального ряда. Способ задания понятий (ни в интенсиональной, ни в экстенсиональной трактовке) у Фреге ничем не ограничен, в том смысле, что понятия могут предполагать любые свойства при условии, что этим свойствам может соответствовать некоторый объём. Да и сам этот объём может быть абсолютно произвольным. Под классом Фреге понимает любую совокупность элементов, имея в виду, что элементы не специфицированы, т.е. они сами могут быть классами других или тех же самых элементов. Возьмём, например, приведённый выше пример с классами $\{a, b, c\}$ и $\{\alpha, \beta, \gamma\}$. Поскольку на образование классов не накладывается никаких ограничений, каждый из элементов второго класса может быть, в том числе, классом, составленным из элементов первого класса. Скажем, элемент α может представлять собой класс $\{a, b, c\}$. В этом случае второй класс представлял бы собой $\{\{a, b, c\}, \beta, \gamma\}$, где первый элемент полностью соответствует первому классу. Аналогичное относится и к другим элементам как второго, так и первого класса. При предлагаемом Фреге определении числа это оказывается безразличным, поскольку взаимно однозначное соответствие элементов сохраняется. Более того, такой подход к образованию классов, при экстенсиональной трактовке определения числа, является крайне важным, поскольку классы, образованные из элементов предыдущего класса, должны принадлежать последующему классу для того, чтобы сохранить бесконечность ряда.

В том же самом смысле, в котором при экстенсиональном подходе классы могут быть совокупностями любых элементов, произвольными при интенсиональном подходе оказываются и функции, областью определения которых могут оказываться как аргументы, так и функции от аргументов, которые рассматриваются как способ задания классов, поскольку каждый класс является областью определения некоторой функции, которая для элементов данного класса задаёт значение ‘истина’. Допустим, что функция fx задаёт в указанном выше смысле класс $\{a, b, c\}$, являющийся её областью определения в том смысле, что каждому аргументу из этого класса она задаёт значение ‘истина’. Но дело в том, что каждый аргумент может представлять собой сложное образование, например заданный некоторой функцией класс $\{\alpha, \beta, \gamma\}$, соответствующий элементу a из предыдущего класса. Тогда, поскольку α есть $\{a, b, c\}$, оказывается, что в качестве одного из своих возможных аргументов *fx* имеет само себя, т.е. допустимо выражение $f(f\hat{x})$, задающее объём такого понятия, которое, в качестве подпадающего под него элемента допускает свою собственную область определения.

Таким образом, оказывается, что как при экстенсиональном, так и при интенсиональном подходах, которые важны при определении общего понятия числа и определении конкретных чисел, в некоторых случаях класс может быть элементом самого себя, а функция своим собственным аргументом. Но как раз здесь и возникает противоречие, которое обнаружил Рассел и которое зависит от подобного способа построения классов и функций, если мы допускаем, что класс может быть элементом самого себя, а функция своим собственным аргументом. Ни экстенсиональный, ни интенсиональный подход к определению числа не оказывается свободным от противоречий.

1.4.2. ***Парадокс Рассела и простая теория типов***

Разделим все классы на нормальные и ненормальные. Под нормальными классами будем понимать такие классы, которые не содержат самих себя в качестве элементов. Например, класс чайных ложек сам не является чайной ложкой, и, значит, он – нормальный. Но вот класс предметов, не являющихся чайными ложками, сам не является чайной ложкой и, значит, содержит сам себя в качестве элемента, являясь ненормальным классом. В этом же смысле можно говорить о нормальных и ненормальных фун-киях или предикатах, определяющих соответствующие классы. Теперь возьмём класс всех нормальных классов и зададим вопрос, а каким, нормальным или ненормальным, является сам этот класс. При любом ответе на этот вопрос мы приходим к противоречию. В экстенсиональных терминах Рассел формулирует свой парадокс следующим образом:

> Пусть *w* – это класс всех тех классов, которые не являются элементами самих себя. Тогда, каким бы ни был класс *x*, ‘*x* есть *w*’ эквивалентно ‘*x* не есть *x*’. Поэтому, если *x* придать значение *w*, то ‘*w* есть *w*’ эквивалентно ‘*w* не есть *w*’ [27. С. 22].

Этот парадокс формулируется также и интенсионально в терминах функций. Так, в письме к Фреге Рассел пишет:

> Вы утверждаете, что функция может быть неопределяемым элементом. Я тоже так считал, но теперь этот взгляд кажется мне сомнительным из-за следующего противоречия: Пусть *w* будет предикатом ‘быть предикатом, не приложимым к самому себе’. Приложим ли *w* к самому себе? Из любого ответа вытекает противоречие. Стало быть, мы должны заключить, что *w* не является предикатом. Также не существует класса (как целого) тех классов, которые, как целое, являются членами самих себя. Отсюда я заключаю, что при определённых обстоятельствах определяемое множество не образует целого [58. P.130].

Необходимо отметить, что в рамках теории множеств, развиваемой Г. Кантором, парадокс Рассела не был первым, хотя остальные парадоксы и были менее известны. Здесь достаточно упомянуть парадокс Бурали-Форти, касающийся ординального числа всех ординальных чисел, или парадокс Кантора относительно кардинального числа класса всех кардинальных чисел [27, С. 23]. Парадоксы Кантора и Бурали-Форти касались бесконечных множеств, поэтому казалось, что подобные противоречия связаны с неправильной трактовкой бесконечности и могут быть преодолены её соответствующей интерпретацией. Парадокс Рассела показал, что дело не в бесконечности, парадоксы могут быть сформулированы в самых простых понятиях.

Для программы логицизма в фрегеанской трактовке парадокс Рассела был фатальным. Действительно, это противоречие важно как минимум тем, что оно было сформулировано в терминах теории конечных классов, которая рассматривалась как связующее звено логики и математики. Оказалось, что противоречия обнаруживаются не только в тех областях математики, которые затрагивают бесконечные множества. Парадокс Рассела показывает, что дело не в порядке с самыми простыми понятиями, если они приняты некритически. Определение числа у Фреге демонстрирует, каким образом, начиная с теории конечных классов, можно свести математику к логике, поскольку конечный класс всегда можно отождествить с объёмом понятия. Но если и здесь есть противоречия, то либо неверна математика, либо отказывают наши познавательные установки, формальным выражением которых является обычно принимаемая логика.

Рассел никогда не сомневался в двух вещах: во-первых, математика верна; во-вторых, верен метод логицизма, т.е. предложенный Фреге проект выведения математики из логики. Из этих двух положений может следовать только то, что неверной является обычная трактовка логики. Что здесь не удовлетворяет Рассела? Обычная логика, как традиционная (субъектно-предикатная), так и созданная Фреге истинностно-функциональная, исходит из того, что подлежащим высказывания может быть всё что угодно. Рассел же считает, что это не так. Своё несогласие он впервые выражает в книге *Основания математики* (1903)[1], формулируя теорию типов, считая, правда, приведённую здесь формулировку «лишь черновым наброском». Впоследствии этот набросок получил название простой теории типов. Конструктивная часть этой теории сводится к ограничениям на построение определённых объектов и запрету рассматривать их как аргументы соответствующих пропозициональных функций.

В терминах классов простую теорию типов можно описать следующим образом. Типы образуют иерархическую систему логических элементов, в которой необходимо строго различать классы и то, что их образует. Элементы класса всегда относятся к типу, низшему, чем сам класс. Так, если α, β, γ суть элементы, относящиеся к типу n, то образованные из них классы $\{\alpha\}$, $\{\alpha, \beta\}$, $\{\beta, \gamma\}$, $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ и т.д. будут относиться к типу $n + 1$. Низшим типом логических элементов Рассел считает индивиды, понимаемые как единичные, самостоятельно существующие предметы. Следующий логический тип образуют классы, составленные из индивидов; затем идут классы, образованные из классов, составленных из индивидов, и т.д. Пусть a, b, c … – индивиды, относящиеся к типу 1, тогда классы $\{a\}$, $\{a, b\}$, $\{a, b, c\}$ … образуют второй тип, классы $\{\{a\}\}$, $\{\{a\}, \{b, c\}\}$, $\{\{a, b\}, \{a, b, c\}, \{c\}\}$ … – третий тип и т.д.

Рассел формулирует следующее ограничение на образования подобных объектов: В рамках одного типа нельзя образовывать классы, которые состоят из элементов, относящихся к разным типам. С этой точки зрения незаконными образованиями являются конструкции типа $\{a, \{b, c\}\}$, $\{a, \{b, c\}\}$, $\{a, \{b, c\}, \{\{a, b\}, \{a, b, c\}\}\}$ и т.п. Данное ограничение действительно предотвращает источник парадокса, так как оно запрещает образовывать классы, являющиеся элементами самих себя. В этом смысле понятие ненормального класса является незаконно образованным.

Поскольку каждый класс задаётся с помощью функций, это решение легко воспроизвести и на этом уровне. Индивиды, т.е. эле-

[1] См. в этой работе ‘Приложение *B*’, русский перевод [23. С. 123–129].

менты первого типа, являются аргументами функций, относящимся ко второму типу; сами эти функции могут быть аргументами функций следующего типа и т.д. В данном случае ограничение касается запрета образовывать функции, аргументами которых являются функции того же самого типа. Следовательно, точно так же, как класс не может быть своим собственным элементом, так и функция не может быть своим собственным аргументом, т.е. конструкции типа $f(f\hat{x})$ являются незаконными.

Простая теория типов блокирует парадокс Рассела в различных его формулировках, рассматривая конструкции, на которых он основан, бессмысленными образованиями. Более того, в рамках простой теории типов нельзя воспроизвести парадоксы Бурали-Форти, Кантора и им подобные, поскольку каждый из них основан на допущении, что класс может быть своим собственным элементом. Казалось, математика, основанная на теории классов и далее на логике, при заданных ограничениях спасена. Но для Рассела простая теория типов действительно оказалась лишь черновым наброском.

1.4.3. *Принцип порочного круга, определимые классы и разветвлённая теория типов*

Прежде, чем перейти к дальнейшему развитию теории типов, следует указать, чем не удовлетворял Рассела её первый вариант. В качестве узловых укажем две причины:

1. Наличие других парадоксов, которые не разрешались простой теорией типов.

2. Неудовлетворенность понятием класса, которое Рассел стремится рассматривать как производное, а не как исходное, что связано с преимуществами интенсионального, а не экстенсионального подхода к совокупностям предметов.

Интересно то, что обе эти причины оказались связанными настолько тесно, что указать, которая из них послужила источником разветвлённой теории типов, практически невозможно. И тем не менее мы начнём с первой, поскольку она имеет объективный исторический источник, тогда как вторая укоренена в философских представлениях собственно Рассела.

Парадоксы, имеющие логический характер, т.е. основывающиеся на форме и истинностном значении высказываний, были известны давно. Самым старым из таких противоречий является так называемый ‘парадокс Лжеца’. Допустим, кто-то говорит: «Я сейчас лгу». Попытка оценить истинность и ложность этого высказывания при любом ответе приводит к противоречию. Если оно истинно, то в силу выраженного им содержания его значение является ложным; если же оно ложно, то отрицает своё собственное содержание и, стало быть, является истинным. В рамках простой теории типов этот парадокс не разрешим.

Не разрешимы в рамках простой теории типов и многие другие противоречия, например парадоксы Дж. Берри, Дж. Ришара, К. Греллинга[1]. Все они имеют одну отличительную особенность, которую мы рассмотрим ниже в связи с классификацией парадоксов Ф. Рамсеем. Пока же в качестве примера остановимся на ‘парадоксе Греллинга’, который формулируется следующим образом: Разделим все слова обычного языка на два класса гетерологические и автологические, руководствуясь принципом, что признак гетерологичности означает, что слово не применимо к самому себе, а его автологичность указывает, что оно характеризует, в том числе, и само себя. Например, слово ‘односложный’ не является односложным, поэтому оно гетерологично, тогда как слово ‘многосложный’ – само многосложно и, стало быть, является автологичным. Рассмотрим теперь слово ‘гетерологический’ и зададим вопрос, к какому из указанных классов принадлежит само это слово. Любой ответ приводит к противоречию, поскольку, если оно – гетерологическое, то среди своих значений должно иметь само себя, и, следовательно, являться автологическим, а если автологическое, то в качестве своего значения должно указывать на гетерологичность, и, следовательно, является гетерологическим.

С точки зрения Рассела все парадоксы, возникающие в процессе рассуждения и затрагивающие значение используемых в рассуждении терминов, связаны с неправильной логикой. Таковыми являются как парадокс Греллинга, так и парадоксы, указанные в предыдущем параграфе. Раз они имеют один и тот же источник, значит, они должны иметь одинаковое решение. Это решение результируется в так называемой разветвлённой теории типов, которая получает оформление в основополагающей статье Рассела «*Математическая логика, основанная на теории типов*» (1908 г.), идеи которой были развиты в *PM*. Источник парадоксов Рассел находит в их «общей

[1] Подробнее о парадоксах этой группы см., например, [43. С. 20–23].

характеристике, которую мы можем описать как самореферентность или рефлексивность», заключающуюся в том, что

> «в каждом противоречии нечто говорится о *всех* случаях некоторого рода, и из того, что говорится, по-видимому, производится новый случай, который как относится, так и не относится к тому же самому роду, что и те случаи, *все* из которых рассматривались в том, что было сказано» [27. С. 24].

Действительно, если мы обратимся к приведённым парадоксам, то все они указывают на общность, которая в качестве элемента включает предмет исходной формулировки. Так, ‘парадокс Рассела’ в класс классов, не имеющих себя в качестве элементов, включает сам себя; ‘парадокс Лжеца’ в общность оцениваемых высказываний включает само высказывание об оценке; ‘парадокс Греллинга’ рассматривает термины, в которых производится различие на классы выражений, как включённые в сами эти классы. Аналогичные замечания относятся и к другим упомянутым парадоксам.

Впрочем, этот источник одним из первых указал А. Пуанкаре[1]. Из этого источника вытекает и принцип решения парадоксов. Формулируя этот принцип, и характеризуя его как ‘принцип порочного круга’, Рассел говорит, что он

> приводит нас к правилу: ‘То, что включает *всё* из совокупности, не должно быть элементом совокупности’; или, наоборот: ‘Если определённая совокупность, при условии, что она обладает целостностью, имела бы элементы, определимые только с точки зрения этой целостности, то эта совокупность не обладает целостностью’ [27. С. 25–26],

подразумевая, что всё то, что нарушает это правило, является бессмысленным.

В данной формулировке этот принцип является чисто отрицательным, поскольку он не даёт критерий, какие конструкции считать осмысленными. Положительный критерий задаётся в рамках разветвлённой теории типов, но допустимые в ней конструкции зависят от представлений Рассела о том, как можно задать совокупность, общность или класс элементов, выступающих подлежащим какого-то высказывания. Это требует рассмотрения второй из указанных выше причин дальнейшего развития теории типов.

---

[1] См., например, [15. С. 374–378].

Существенную роль здесь имеет ряд соображений, имеющих сугубо философский характер. Учитывая эту особенность, будем отталкиваться от работы Рассела «*Введение в математическую философию*» (1918 г.), в которой наиболее рельефно подчёркивается этот аспект. Там говорится буквально следующее:

> Класс или совокупность могут быть определены двумя способами, которые кажутся совершенно отличными друг от друга. Мы можем пронумеровать все его члены … или же я могу упомянуть определяющее свойство … Определение, которое перечисляет, называется ‘экстенсиональным’ определением, а то, которое упоминает определяющее свойство, называется ‘интенсиональным’. Из этих двух определений интенсиональное является логически более фундаментальным. (1) Экстенсиональное определение может быть всегда сведено к интенсиональному, и (2) интенсиональное определение не может быть, часто теоретически, сведено к экстенсиональному [25. С. 77].

В контексте предыдущих замечаний это означает: Класс философов мы, например, можем задать перечислением, указав, что к тому классу относятся *Сократ*, *Платон*, *Аристотель* и т.д. Подобный экстенсиональный способ задания класса – работа не только кропотливая, но и неблагодарная, поскольку всегда можно пропустить элемент, который должен входить в этот класс. Работа историков философии, особенно древней философии, постоянно демонстрирует эту возможность. Действительно, простое перечисление характеризуется тем недостатком, что какой-то из элементов может быть пропущен. Здесь мы уже и не говорим, что перечисление нельзя применить для необозримых классов и, тем более, для классов бесконечных. Даже если предположить, пусть и не бесконечное, но достаточно продолжительное существование человеческого рода, мы не сможем экстенсионально определить класс философов, который, как и человеческий род, может оказаться как необозримым, так и бесконечным.

Из подобного рода соображений Рассел делает вывод, что гораздо удобнее, и более правильно, задавать класс через определяющее свойство, т.е. интенсионально, которое принадлежит его элементам. Как бы мы ни понимали свойство ‘быть философом’, оно однозначно задаёт совокупность имеющих его элементов. В этом отношении свойство первичнее класса, поскольку свойству всегда соответствует класс, тогда как не всегда возможно задать класс с тем, чтобы не указать свойство, которому удовлетворяли бы все его элементы, и только они. В этом отношении Рассел считает, что свойство, задающее класс, является более фундаментальным, чем общность образующих этот класс элементов.

Здесь следует отметить ещё один момент, имеющий непосредственное отношение к собственно философским представлениям Рассела. У него не вызывает сомнение наличие самостоятельно существующих (или, в его терминологии, сабсистентных) вещей, гораздо хуже дело обстоит с образованными из них классами. Если существование *Сократа*, *Платона* и *Аристотеля* подтверждено опытом, то существование состоящего из них класса вывести из опыта нельзя. Классы являются результатом абстракции, а потому для Рассела представляют собой фикции, т.е. производные от элементов образования, которые мы можем создать, основываясь на общем свойстве последних. И действительно, в непосредственном знакомстве нам никогда не может быть дана общность {*Сократ*, *Платон*, *Аристотель*, …}. Например, если нам известна конкретная берёза, конкретный дуб, конкретная сосна и т.д., это ещё не означает, что мы ориентируемся в лесу, который они образуют, хотя это и может быть так. Но с философами дело обстоит сложнее. Этот класс, при здравом размышлении, всегда отличается неполнотой или неизвестным нам разнообразием.

Обобщая данный пример, можно сказать, что для Рассела понятие о произвольной совокупности элементов менее понятно, чем понятие о некотором задающем эту совокупность свойстве[1]. Так, если класс людей, являющихся философами, через перечисление задать трудно, то задать его же через указание свойства ‘быть философом’ удобно, поскольку этому свойству будут удовлетворять не только те элементы, о которых нам известно, но и те, которые мы пропустили, и даже те, которые могут появиться в будущем. Таким образом, при объяснении общностей или классов, исходными являются не классы и индивиды, из которых они состоят, но свойства и индивиды, которые ими обладают. Други-

[1] Здесь сошлёмся на мнение У. Куайна, с которым в данном случае нельзя не согласиться: «Философски Рассел предпочитал свойства и полагал, что, контекстуально определяя классы на основании теории свойств, он объясняет смутное с точки зрения более ясного. Но это его ощущение объяснимо тем, что у него отсутствует различение пропозициональных функций как предикатов, или выражений, и пропозициональных функций как свойств. Не сумев сделать этого различия, он легко мог посчитать, что понятие свойства яснее, чем понятие класса, который представлен предикатом. Но понятие свойства как раз и менее ясно» [76. P. 256].

ми словами, первичными для Рассела являются не классы, но свойства, которыми могут обладать индивиды и которые задают соответствующий класс.

Интенсиональное задание классов особенно важно в связи с определением чисел. Как считает Рассел экстенсиональный подход здесь не подходит минимум в трёх отношениях:

> Во-первых, числа сами образуют бесконечную совокупность и не могут, следовательно, быть определены перечислением. Во-вторых, совокупности, имеющие данное число терминов, сами, по предположению, образуют бесконечную совокупность… В-третьих, мы должны определить ‘число’ таким образом, чтобы были возможны бесконечные числа [25. С. 78].

Действительно, даже если использовать фрегеанский подход к определению числа, то бесконечную совокупность конструкций типа ‘$\varnothing$, $\{\varnothing\}$, $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$, $\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$...’ нельзя задать перечислением. Её можно задать лишь через указание порождающего её свойства, как и поступает Фреге, использующий функцию ‘$x \neq x$’ для задания первого элемента данного ряда. Более того, каждому из элементов этой конструкции во взаимно однозначное соответствие может быть сопоставлена бесконечная общность классов, характеризующихся равночисленностью элементов. Так, числу два соответствует не только класс спутников Марса, но и класс афинских тираноборцев, класс биологических родителей данного ребёнка и т.д. вплоть до бесконечности. Перечислить такие классы за конечное число шагов невозможно, их можно лишь задать через определяющее свойство, а именно свойство ‘иметь заданное количество элементов’, что уже предполагает определение числа в указанном двумя предложениями выше первом отношении. Ситуация ещё более осложняется, если мы переходим к попытке определить бесконечные числа. Как мы видели, весьма затруднительно задать бесконечную совокупность классов с конечным количеством элементов, но если и элементов оказывается бесконечность, то, как считает Рассел, выход один – указать определяющее свойство, поскольку

> мы должны быть способны говорить о числе терминов в бесконечной совокупности, и такая совокупность должна определяться интенсионально, т.е. через свойство, общее всем её членам и свойственное только им [25. С. 78].

Следуя Расселу, получается, что о классах вообще, конечных или же бесконечных, мы можем говорить только тогда, когда известно определяющее эти классы свойство. В этом отношении свойство является более примитивным элементом, чем класс, и именно оно должно рассматриваться в качестве исходного. Эту мысль Рассел проводит и на уровне функций. Определяющему свойству всегда соответствует пропозициональная функция, областью значения которой является истина, когда аргументами выступают элементы определимого данным свойством класса. В символике *PM* Рассел подчёркивает эту близость, обозначая свойство, соответствующее функции fx как $f\hat{x}$, когда необходимо говорить о самом свойстве, которое может выступать аргументом другой функции.

Итак, определяющие свойства и, стало быть, функции по отношению к классам первичны, это как раз и приводит к разветвлённой теории типов. Всё дело в том, что один и тот же класс можно задать с помощью различных пропозициональных функций. Так, например, примем допущение, что философы, и только они, являются мудрецами. Тогда функции 'x – философ' и 'x – мудрец' будут выполняться для одних и тех же аргументов и, следовательно, определять один и тот же класс. С точки зрения простой теории типов эти две функции будут относиться к одному и тому же типу, и мы можем обозначить их как fx и gx. Но с другими случаями дело обстоит не так просто. Возьмём два высказывания: «Сократ – философ» и «Сократ имеет все свойства философа». Первое из них образовано из функции вида fx, но относится ли к такому виду второе? Отметим, что во втором высказывании присутствует выражение 'все', указывающее на некоторую общность, правда, общность не индивидов, но свойств. Тем не менее это выражение относится к логическим элементам конструкции и при неверном подходе может привести к тем самым рефлексивным недоразумениям, о которых говорилось выше.

В высказывании «Сократ имеет все свойства философа» функция, место индивидной переменной в которой занимает *Сократ* (т.е. функция 'x имеет все свойства философа'), включает ещё одну переменную, которая пробегает по свойствам философа, какими бы мы себе их ни представляли. Например, её место могут занимать такие признаки, как честность, стремление идти до конца, логичность и т.п. Таким образом, исходная функция, пробегающая по индивидам, включает ещё одну функцию, область пробега которой представляет собой класс свойств. Правда, здесь следует учитывать, что индивидная переменная и переменная свойств играют в исходной функции разную роль.

Это различие связано с тем, что Рассел называет действительной и мнимой (или кажущейся) переменной. Действительная переменная предполагает *какое-то* значение, которое может изменяться, и с его изменением будет меняться и всё высказывание. Кажущаяся же переменная не предполагает изменение высказывания, поскольку рассматриваются все её возможные значения. Следуя Расселу,

> если ϕx – пропозициональная функция, то посредством ‘$(x).\phi x$’ мы будем обозначать пропозицию ‘ϕx всегда истинно’. Сходным образом ‘$(x, y).\phi(x, y)$’ будет обозначать ‘$\phi(x, y)$ всегда истинно’ и т.д. Тогда различие между утверждением всех значений и утверждением какого-то значения есть различие между (1) утверждением $(x).\phi x$ и (2) утверждением ϕx, где x не определён. Последнее отличается от первого тем, что оно не может трактоваться как одна определённая пропозиция [27. С. 28–29].

В нашем примере роль действительной переменной играет индивидная переменная, поскольку замена *Сократа* на другие индивиды будет приводить к изменению высказывания, но переменная, указывающая на свойства, подразумевает их все, и, стало быть, пробег этой переменной никакого влияния на высказывание не оказывает. Здесь имеется в виду, что для любого свойства, если оно является свойством философа, то Сократ им обладает. Поэтому, функция ‘x имеет все свойства философа’ должна рассматриваться как $(f).\phi(f\hat{x}, x)$, где $f\hat{x}$ пробегает по свойствам философов и является мнимой (кажущейся) переменной, а x – действительной переменной.

Для Рассела очевидно, что конструкция типа $(f).\phi(f\hat{x}, x)$ (далее будем обозначать её как Fx) существенно отличается от конструкций типа fx, хотя они и могут задавать один и тот же класс. Здесь необходимо обращать внимание не только на тип аргумента, как было в простой теории типов, но и на порядок функции, который определяется структурными элементами, из которых она построена. Функции ‘x – философ’ и ‘x имеет все свойства философа’ относятся к разным порядкам, поскольку вторая из них, помимо действительной индивидной переменной, включает переменную, хотя и мнимую, относящуюся к другому типу, чем тип индивидной переменной. Рассел следующим образом разводит порядки:

> Функция, аргументом которой является индивид и значением которой всегда является пропозиция первого порядка, будет называться функцией первого порядка. Функция, включающая первопорядковую функцию или пропозицию в качестве мнимой переменной будет называться второпорядковой функцией и т.д. [27. С. 40].

В разветвлённой теории типов при установлении порядка fx и Fx необходимо обращать внимание не только на тип аргумента x, но и на характер построения f и F. Поэтому, несмотря на сходство аргументов, функции fx и Fx относятся к разным порядкам.

Таким образом, различие между простой и разветвлённой теорией типов состоит в следующем. Как указывалось выше, для различения типов функций в простой теории типов достаточно установить различие в типе их аргументов. В разветвлённой теории типов различие функций определяется к тому же порядком мнимых переменных, используемых при их построении. Поэтому, если с точки зрения простой теории типов fx и Fx относятся к одному и тому же типу, то в разветвлённой теории типов они относятся к разным порядкам, поскольку при их построении используются разные типы аргументов. В данном случае, если индивиды относятся к типу 0 и x – индивидная переменная, то fx и Fx – к типу 1, но при этом fx относится к порядку 1, а Fx – к порядку 2.

Согласно порядку функций, соответствующую иерархию образуют и построенные из них высказывания. Элементарные высказывания (т.е. атомарные высказывания плюс истинностные функции атомарных высказываний) в совокупности с высказываниями, содержащими в качестве мнимых переменных только индивидные переменные, образуют первый логический тип. Высказывания, в качестве мнимых переменных включающие высказывания и функции первого логического типа, образуют общность, относящуюся ко второму логическому типу и т.д. В общем случае, высказывания, включающие в качестве мнимых переменных высказывания и функции типа n, образуют общность типа n+1.

Обратимся теперь к парадоксам. Источником парадоксов Рассел считает неограниченное использование функций вида Fx, в структуру которых входит указание на общность, заданную мнимыми переменными, относящимися к типу более высокому, чем тип их действительных аргументов. Именно они приводят к «рефлексивным или самореферентным недоразумениям», поскольку включённое в них указание на общность, может, в том числе, подразумевать и сами эти функции. В этом случае функция Fx может оказаться значением включённой в неё мнимой переменной. Так, вернёмся к примеру с функцией 'x имеет все свойства философа'. Здесь свойство *иметь все свойства философа* само является свойством философа и, значит, может быть значением мнимой переменной $f\hat{x}$ в Fx, равной переменной $(f).\phi(f\hat{x}, x)$. Т.е. здесь мы получаем порочный круг, так как Fx рассматривается как одно из возможных значений $f\hat{x}$, которое уже включено в её же структуру. Таким образом, использование мнимых переменных в структуре функций необходимо ограничить, с тем чтобы конструкции, в которых функции могли бы предполагать сами себя в качестве аргументов, считались не истинными и не ложными, но бессмысленными. Для этого Рассел предлагает выход, аналогичный простой теории типов. Он ограничивает область пробега мнимых переменных определённым типом.

Дальнейшее развитие теории типов связано с понятием предикативной функции, которую Рассел определяет следующим образом:

> Функция от одной переменной, относящаяся к порядку, следующему за порядком её аргумента, будет называться *предикативной* функцией; такое же название будет даваться функции от нескольких переменных, если среди этих переменных есть переменная, в отношении которой функция становится предикативной, когда значения приписываются всем другим переменным [27. С. 40].

Если вернуться к нашим примерам, то fx является предикативной функцией от x, тогда как функция $Fx =_{\text{def.}} (f).\phi(f\hat{x}, x)$ не является предикативной функцией от x, так как включает переменную $f\hat{x}$, более высокого типа, чем x. Предикативные функции образуют строгую иерархию порядков, которая зависит от той общности, которую они предполагают.

Все функции, с помощью которых построены атомарные высказывания, в указанном выше смысле, и высказывания, построенные из атомарных с помощью логических союзов (т.е. элементарные высказывания), являются предикативными функциями от индивидов. Они образуют общность, в которую входят функции вида fx, $\sim fx$, $fx \vee gx$, $fx \supset gx$, где x – индивидная переменная. Предикативные функции от индивидов Рассел обозначает как '$f!x$' и относит их к первому порядку. Предикативные функции первого порядка образуют определённую целостность и $f!x$ может быть преобразована в мнимую или кажущуюся переменную.

Функции, которые в свою структуру включают указание на другие свойства, относятся к более высоким порядкам. Так, функция $(f).\phi(f\hat{x}, x)$ включает указание не только на индивиды, но и на общность их свойств. Такие функции не являются предикативными функциями от x и относятся ко второму порядку. Но они являются предикативными функциями от функций первого порядка, и их можно записать в виде ‘$\psi!(f!\hat{x})$’. Функции второго порядка сами образуют целостность, выступая аргументами некоторой другой предикативной функции уже третьего порядка. Этот ряд можно продолжить далее до бесконечности.

Предикативность чётко фиксирует порядок функции через указание совокупности её возможных значений и позволяет ограничить использование мнимых переменных рамками одного типа. Это ограничение Рассел формулирует следующим образом:

> В ϕx ϕ нельзя преобразовать в мнимую переменную, поскольку её тип не определён; но в $\phi!x$, где ϕ является предикативной функцией, чей аргумент относится к некоторому заданному типу, ϕ *можно* преобразовать в мнимую переменную [27. С. 41].

Так, например, если мы берём функцию ‘x имеет все свойства философа’, то мы не можем преобразовать *свойство философа* в мнимую переменную до тех пор, пока не укажем, что эта функция является предикативной, т.е. пробег мнимой переменной, которую она включает, ограничен типом, ниже её самой. В этом случае свойство *иметь все свойства философа* относится к порядку, более высокому, чем свойства философа, и не должно включаться в их совокупность.

Поэтому, если конструкция $(f).\phi(f\hat{x}, x)$ и может приводить к недоразумениям, то конструкция $(f).\phi!(f\hat{x}, x)$ является вполне законной, поскольку она предикативна, т.е. ограничена определённым типом, и не может включать в область значений $f\hat{x}$ саму функцию $Fx =_{\text{def.}} (f).\phi(f\hat{x}, x)$. В *PM* ограничение формулируется так:

> Мы можем расширить смысл ϕ : функция от x, в которой ϕ входит в качестве кажущейся переменной, имеет, соответственно, расширенное толкование, так что как бы ни была определена ϕ, $(\phi).f!(\phi\hat{z}, x)$ и $(\exists\phi)$.

> $f\,!(\phi\,\hat{z}\,,\,x)$ никогда не могут быть значениями ϕx. Попытка сделать их таковыми подобна попытке поймать свою собственную тень. Невозможно получить одну переменную, которая заключает среди своих значений все возможные функции индивидов [39. Т. 1. С. 58][1].

Согласно порядку предикативных функций различается и тип высказываний, которые из них построены. Если считать, что индивиды относятся к типу 0, то высказывания, включающие функции вида $f!x$, где мнимые переменные ограничены индивидными переменными, относятся к типу 1, функции вида $\phi!(f!\,\hat{x})$, где мнимые переменные ограничены предикативными функциями 1 порядка, – к типу 2 и т.д.

Стратификация функций и высказываний в рамках разветвлённой теории типов даёт Расселу позитивное решение парадоксов, для которых сформулированный выше ‘принцип Пуанкаре’ выступал лишь негативным критерием. Как утверждает Рассел:

> Важно заметить, что поскольку существуют различные типы пропозиций и функций и поскольку обобщение может быть применено только в рамках некоторого одного типа, все фразы, содержащие слова ‘все пропозиции’ или ‘все функции’ *prima facie* бессмысленны, хотя в определённых случаях они могут быть интерпретированы как не вызывающие возражений. Противоречия возникают при использовании таких фраз, где нельзя обнаружить простого значения [27. С. 41].

Нетрудно видеть, что разветвлённая теория типов разрешает все парадоксы, типа ‘парадокса Рассела’, поскольку она сохраняет основной принцип простой теории типов, что функция не может быть своим собственным аргументом. Но, помимо того, она устраняет и остальные парадоксы, о которых выше шла речь. Так, возьмём ‘парадокс Лжеца’. Когда кто-то говорит: «Я сейчас лгу», – это, как считает Рассел, подразумевает: «Существует высказывание типа n, которое я утверждаю и которое ложно», но сама эта пропозиция должна относиться к типу n + 1 и не может являться значением присутствующей в ней мнимой переменной, на которую указывает выражение ‘некоторое’. И это решает ‘парадокс Лжеца’. Возьмём теперь ‘парадокс Греллинга’, который, следуя установкам *PM*, теперь, в изложении Рамсея (учитывая, что ‘прилагательное’ должно рассматриваться в цитате как синоним ‘функция’ или ‘предикат’) решается так:

---

[1] Здесь и далее *Principia Mathematica* цитируется по русскому переводу [39].

> Прилагательное является символом для пропозициональной функции, *например*, ‘ϕ’ для $\phi\hat{x}$. Пусть R является отношением обозначения между ‘ϕ’ и $\phi\hat{x}$. Тогда ‘w есть гетерологическое’ представляет собой ‘$(\exists\phi) . wR(\phi\hat{x}) . \sim\phi w$’. Здесь, как мы видели, мнимая переменная ϕ должна иметь определённую область значений (*например*, область элементарных функций), членом которой не может быть само $Fx = :. (\exists\phi) : xR(\phi\hat{x}) . \sim\phi x$. Поэтому само ‘гетерологическое’ или ‘F’ не является прилагательным в том смысле, в котором прилагательным является ‘ϕ’. У нас нет $(\exists\phi)$. ‘F’$R(\phi\hat{x})$, поскольку значение ‘F’ не является функцией, включённой в область ‘ϕ’. Поэтому, когда гетерологическое и автологическое определяются недвусмысленно, ‘гетерологическое’ не является прилагательным в рассматриваемом смысле и не является ни гетерологическим, ни автологическим, и противоречия – нет [17. С. 46].

Иными словами, функции Fx и ϕx относятся здесь к разным порядкам, поскольку Fx, в отличие от ϕx, не является предикативной функцией от x. И, если мы должны выполнить требования разветвлённой теории типов и сохранить предикативность мнимой или кажущейся переменной ϕ, то включать Fx в область её возможных значений нельзя. Если мы это делаем, то получаем не противоречие, а бессмысленное выражение.

1.4.4. *Аксиома сводимости и классы*

Предлагаемый Расселом подход к решению парадоксов в рамках разветвлённой теории типов на первый взгляд кажется вполне оправданным, если бы он не приводил к некоторым нежелательным следствиям в математике, где ограничение, накладываемое на мнимые переменные, исключает весьма важные способы рассуждения. В условиях выдвинутого ограничения необоснованными оказываются те математические положения, которые предполагают указание на все свойства некоторых элементов или, что то же самое, на все функции от некоторых аргументов, независимо от их порядка. Самыми важными здесь, по-видимому, являются принцип математической индукции и Дедекиндово сечение.

Принцип математической индукции лежит в основании арифметики, поскольку с его помощью устанавливаются общие свойства членов натурального ряда. Его можно сформулировать следующим образом: «Всякое свойство, предполагаемое 0, а также последующим элементом всякого числа, предполагающего это свойство, предполагается всеми числами натурального ряда». Приемлемый в рамках обычной арифметики этот принцип не соответствует требованиям разветвлённой теории типов, поскольку приводит к явным несообразностям.

Действительно, согласно сформулированному выше ограничению, указанная в этом принципе общность свойств должна быть ограничена определённым порядком. Предположим, что эта общность свойств относится к порядку n. Введём теперь свойство *быть конечным числом*, которое согласно этому же принципу формулируется следующим образом: «Конечное число – это число, которое предполагает все свойства, предполагаемые 0, а также последующим элементом, каждого числа, предполагающего это свойство». Однако здесь, в соответствии с разветвлённой теорией типов, выражение общности 'все' указывает на то, что функция 'x – конечное число' относится к порядку $n + 1$. Поскольку мы ограничили принцип математической индукции свойствами порядка n, его нельзя применять к функциям порядка $n + 1$. Стало быть, этот принцип, только что сформулированный для чисел вообще, оказывается неприменимым уже к конечным числам. Мы не можем его использовать даже в таком простом виде, как: «Если $m + 0$ есть конечное число, и если из того, что $m + n$ есть конечное число, следует, что конечным числом является $m + n + 1$, то конечным является $m + n$»[1].

Дедекиндово сечение лежит в основании математического анализа, являясь наиболее удобным способом обоснования теории действительных чисел. Метод Дедекинда требует рассматривать действительные числа с точки зрения разбиения рациональных чисел на совокупности, обладающие определённым свойством. В этом случае действительное число представляет собой функцию, аргументом

[1] Отметим, что во втором издании *PM* (1925 г.) в 'Приложении 2' к первому тому Рассел показал, каким образом, с помощью ряда изменений трактовки самого принципа математической индукции, от этого недоразумения можно избавиться [39. С. 697–704] без использования аксиомы сводимости, о которой речь здесь идёт ниже. Следует, однако, указать, что Рассел не предложил общего метода устранения подобного затруднения. В любом случае остаются проблемы с Дедекиндовым сечением, как, впрочем, и с любыми другими проблемами подобного рода.

которой является рациональное число. Поскольку в математическом анализе часто используются положения, требующие указания на общность действительных чисел, то задающие их функции, согласно ограничению, накладываемому разветвлённой теорией типов, должны быть ограничены некоторым порядком, допустим n. Тогда любая функция, включающая указание на общность порядка n, сама не будет задавать никакого действительного числа, поскольку будет относиться к порядку $n + 1$.

При таком подходе необоснованными оказываются фундаментальные положения математического анализа, например теорема о существовании верхней границы, утверждающая, что для всякой ограниченной совокупности действительных чисел (или, что то же самое, для каждой ограниченной совокупности задающих их функций) существует действительное число a, которое удовлетворяет следующим условиям: 1) всякое число выбранной совокупности меньше или равно a; 2) для каждого действительного числа, которое меньше a, есть некоторое действительное число, больше его самого. Нетрудно заметить, что функция, задающая число a, должна относиться к порядку $n + 1$, поскольку указывает на общность функций порядка n. Следовательно, поскольку, как установлено выше, действительные числа задаются функциями порядка n, получается, что a не является действительным числом и теорема оказывается бессмысленной.

Поскольку Рассел не собирается отказываться ни от математического анализа, ни тем более от арифметики, единственный выход он видит в том, чтобы уравнять порядки функций от одного и того же аргумента. Действительно, в примерах с математической индукцией и теоремой о верхней границе вся проблема заключается в том, что вводимые посредством их функции оказываются на порядок выше, чем функции, об общности которых идёт речь в формулировке, хотя они и относятся к одним и тем же аргументам. Следовательно, стоит лишь уменьшить порядок новых функций (а лучше всего эти порядки вообще игнорировать), сохранив различие только в типе аргументов. Каким образом это можно осуществить?

Следуя Расселу, будем называть все функции (независимо от их порядка) формально эквивалентными, если они истинны для одних и тех же аргументов. Формально эквивалентными, например, будут рассмотренные выше функции ‘x – философ’ (т.е. fx) и ‘x имеет все свойства философа’ (т.е. $(f).(\phi(f\hat{x}) \supset fx)$), хотя они и относятся к разным порядкам, поскольку первая из них является предикативной функцией от x, а вторая – нет. Стоит отметить, что эти функции взаимозаменимы в контексте в том смысле, что построенное с помощью одной из них высказывание сохраняет свою истинность, если мы заменим одну функцию на другую. Например, истинными являются и высказывание «Сократ – философ», и высказывание «Сократ имеет все свойства философа». Таким образом, возможность замены $(f).(\phi(f\hat{x}) \supset fx)$ на fx уменьшает порядок функции, сохраняя тип аргумента. В общем случае можно предположить, что для любых непредикативных функции от x, относящихся к некоторому порядку, скажем $f_2(x)$, $f_3(x)$ … $f_n(x)$, можно отыскать предикативную функцию $f!x$, которая будет им формально эквивалентна, т.е. истинна для тех же самых аргументов.

Согласно данному выше определению, предикативная функция будет лишь по типу отличаться от своего аргумента и не будет порождать тех недоразумений, связанных с различием порядков функций, которые указаны выше в связи со способами математических рассуждений. Поэтому, если мы предположим, что для любой функции от x (где x не специфицирован, т.е. может быть как индивидом, так и функцией какого-то порядка) порядка $n + m$ может быть найдена предикативная функция от x (т.е. относящаяся к порядку n), то проблема будет решена.

Это предположение Рассел формулирует в виде ‘Аксиомы сводимости’: «Каждая пропозициональная функция для всех своих значений эквивалентна некоторой предикативной функции» или, формально,

$$\vdash :. (\exists f) :. (x) : \phi x . \equiv . f!x.$$

Как утверждается в *PM*:

> Посредством этого предположения порядок непредикативной функции может быть понижен на единицу; следовательно, после некоторого конечного числа шагов мы будем в состоянии получить из любой непредикативной функции формально эквивалентную предикативную функцию [39. Т. 1. С. 134].

Для функций ‘x – философ’ и ‘x имеет все свойства философа’ содержание этой аксиомы очевидно, но как сделать его очевидным для всех других случаев? Где гарантия, что подобная предикативная функция есть?

Такую гарантию Рассел находит в том, что формально эквивалентные функции задают один и тот же класс. Поэтому, в общем случае, все такие функции заменимы единственной функцией, а именно, 'x есть элемент класса α'. Эта функция, очевидно, является предикативной, поскольку её аргумент всегда лишь одним порядком ниже её самой. И хотя Рассел считает классы фикциями, оказывается, что эти фикции весьма удобны, коль скоро речь идёт об уменьшении порядка функций. Более того, единственным разумным основанием введения классов он считает то, что они обеспечивают очевидность аксиоме сводимости. В частности, он утверждает, что если и возможен некоторый метод сведения порядка пропозициональной функции, не воздействующий на истинность и ложность её значений, то здравый смысл достигает этого только введением классов:

> Главная цель, которой служат классы, и главная причина, которая делает их лингвистически удобными, состоит в том, что они обеспечивают метод сведения порядка пропозициональной функции. Следовательно, я не буду допускать ничего, что, по-видимому, подразумевается при допущении классов здравым смыслом, за исключением следующего: Каждая пропозициональная функция для всех своих значений эквивалентна некоторой предикативной функции [27. С. 43].

Здравый смысл, к которому апеллирует Рассел, оказался бы ещё более удобным, если бы можно было сразу начать с классов и образующих их индивидов, а не с индивидов и их свойств, что, как указывалось выше, в структуре *PM* считается более обоснованным. Ибо, как указывает Рассел, «если мы сразу предположим существование классов, аксиома сводимости станет ненужной» [39. Т. 1. С. 153]. Но если мы начинаем со свойств, считая интенсиональный способ задания совокупностей элементов более фундаментальным, то без аксиомы сводимости не обойтись.

Впрочем, следует отметить, что аксиома сводимости основана на отождествлении всех формально эквивалентных функций с некоторыми предикативными функциями, тогда необходимо предполагать, что и первые, и вторые даны изначально. Т.е. все свойства, посредством которых можно интенсионально задать класс предметов, уже присутствуют, когда мы устанавливаем их наличие у определённых предметов. В этом случае, если бы у нас был способ однозначного отбора предикативных свойств из всех возможных свойств, то необходимость в аксиоме сводимости также отпала бы[1]. Однако такая способность к дифференциации свойств зависела бы от определённых эпистемологических способностей человека, которую, хотя и можно предполагать, но в рамках математики, как она представлена с точки зрения разветвлённой теории типов, обосновать можно только аксиоматически.

Как бы там ни было, аксиоматическое сведение порядков различных функций от одного и того же аргумента через отождествление их с предикативной функцией от того же самого аргумента означает только то, что разветвлённая теория типов сводится к простой теории типов, как она сформулирована выше[2]. Действительно, из всех различий порядков функций аксиома сводимости оставляет только то, чтобы предикативная функция (формально эквивалентная всем функциям от одного и того же аргумента) была на порядок выше своего аргумента. Это означает лишь то, что предикативная функция не может быть своим собственным аргументом и, соответственно, класс, который задаётся данной функцией, не может быть своим собственным элементом.

Из аксиомы сводимости вытекает одно весьма важное следствие: Если понятие предикативной функции тождественно понятию класса, то построение формальной теории можно начинать не с индивидов и свойств, а с классов. Но отождествление предикативных функций с классами возвращает нас к проблемам, которые были сформулированы в начале предыдущего параграфа. Первая из них связана с

---

[1] На это указывает Д.Гильберт: «Область функций первой ступени должна быть настолько обширной, чтобы выполнялась аксиома сводимости. Если мы будем считать предикаты различными лишь постольку, поскольку различны принадлежащие им множества, принимая, следовательно, теоретико-множественное истолкование исчисления, то требование аксиомы сводимости означает: совокупность функций первой ступени должна быть настолько обширна, чтобы заключать уже все функции. Но в таком случае идея ступенчатого исчисления была бы бесполезным усложнением, и можно с самого начала предположить систему всех функций одного и того же типа как существующую саму по себе совокупность» [6. С. 231]. Отметим, что такой подход означал бы, что мы начинаем с классов, а не свойств, поскольку понятие предикативной функции эквивалентно понятию класса.

[2] У. Куайн считает: «Можно отказаться не только от первоначального разветвления порядков свойств и интенсиональных отношений, но и от самих свойств и интенсиональных отношений. Мы можем просто рассматривать классы и экстенсиональные отношения у Рассела в качестве отправного пункта, что относится к простой теории типов, которая уже была в *Principles of Mathematics*. Пока сохраняется разветвление порядков, так что два равнообъёмных свойства по порядку различны, сохраняется необходимость различения равнообъёмных свойств, и отсюда, необходимость называть их свойствами, а не классами. Но если мы отказываемся от разветвления, то причина, по которой мы начинаем со свойств, а не с классов, исчезает» [76. P. 255].

более широкой совокупностью парадоксов, для решения которых и была предназначена разветвлённая теория типов. Вторая проблема относится к тому, каким образом задаются классы, если мы исходим из интенсионального подхода, т.е. считаем, что класс задаётся свойством, пусть и предикативным.

Остановимся на первой проблеме. Поскольку аксиома сводимости позволяет отождествить функции различных порядков с предикативными функциями, может возникнуть подозрение, что вновь объявятся парадоксы, которые обсуждались в предыдущем параграфе. Однако здесь следует учесть, что Рассел ограничивает применение аксиомы сводимости лишь высказываниями математики. Он считает, что при формулировке парадоксов второй группы задействуются понятия, не имеющие к математике никакого отношения. Поэтому если мы ограничимся лишь математическими положениями, суть которых Рассел видит в их экстенсиональности, т.е. в неразличимости формально эквивалентных функций, то проблем не возникает. Действительно, если считать, что сущность математики заключается в общности выражений, то все содержательные различия, связанные с порядком функций, исчезают. Так, если мы задаём класс некоторых предметов, то для математики важно лишь то, чтобы он был задан однозначно, а какие при этом используются функции – безразлично. Допустим, например, что нас интересует класс из *n* элементов, и оказалось, что элементы этого класса являются философами. Для того чтобы задействовать этот класс в вычислительных процедурах, совершенно безразлично, с помощью какой функции мы его зададим, ‘x – философ’ (т.е. fx) или ‘x имеет все свойства философа’ (т.е. $(f).(\phi(f\hat{x}) \supset fx)$). Все преобразования с классами, например установление взаимно однозначного соответствия или операции пересечения и объединения, будут сохраняться.

Конечно, как показал Рассел, введение классов само не свободно от парадоксов. Но аксиома сводимости сохраняет простую теорию типов, поскольку требование предикативности функции, задающей класс, указывает на то, что сама эта функция не может быть своим собственным аргументом. То есть парадоксы, типа парадокса Рассела, не проходят и с принятием этой аксиомы.

Зачем тогда всё-таки понадобилась разветвлённая теория типов. Здесь мы выскажем некоторые соображения. Если бы Рассел изначально ограничился математикой, то разветвлённая теория типов была бы не нужна. Но он начинает с более общих проблем, а именно, с проблем непарадоксального языка. Разветвлённая теория типов – это не теория математики. Это более общая теория, которая стремится согласовать способы выражения с их непротиворечивостью. Математика же использует частный язык, который получается посредством ограничения общих средств непротиворечивых выражений. Аксиома сводимости для Рассела как раз и есть такой способ ограничения, с помощью которого мы из обычных средств выражения получаем то, что можно сказать на языке математики. Можно утверждать, что аксиома сводимости – это самая философская концепция Рассела, касающаяся математики, ибо именно она сводит любые средства выражения к выражениям математики или, скорее, указывает на то, что считать выражением математики, предполагая некоторые упрощения в его структуре.

Итак, проблема, связанная с парадоксами, решается, поскольку парадоксы первого вида исключены структурой предикативных функций, а парадоксы второго вида исключены тем, что математика ограничивается использованием любой функции из формально эквивалентных. Остаётся вторая проблема: каким образом однозначно задаются классы, если исходить из интенсионального подхода, т.е. считать, что класс задаётся свойством, и при этом, согласно аксиоме сводимости, считать, что всякое свойство эквивалентно какому-то предикативному свойству?

1.4.5. *Следствия для аксиом бесконечности и мультипликативности*

Ответ на вопрос, которым заканчивался предыдущий параграф, достаточно прост, если учесть, что основная цель *PM* заключается в сведении основных понятий математики к логике. Аксиома сводимости, несмотря на все усложнения, связанные с различением порядка функций, позволяет вернуться к классам, с точки зрения которых как раз и можно определить понятие числа. Начнём с классов.

Используя аксиому сводимости для задания классов в рамках логицистского подхода к математике, мы теперь можем обойтись только предикативными функциями. Каждой такой функции $\phi!x$ соответствует класс $\hat{z}\,\{\phi z\}$, т.е. класс тех элементов, для которых функция ϕx является истинной. Например, функция '*x* – философ, отравленный по решению афинского собрания' будет задавать класс

$\{$*Сократ*$\}$, а функция 'x – афинские тираноубийцы' будет задавать класс $\{$*Аристогитон*, *Гармодий*$\}$, поскольку, первая является истинной только для *Сократа*, а вторая – только для *Аристогитона* и *Гармодия*.

В общем случае, если ϕ является переменной, тогда для каждого её значения будет задаваться некоторый класс, содержащий определённое количество элементов. Так, если значением ϕ является f, то класс $\hat{z}\,\{fz\}$ может состоять из n элементов, а если значением ϕ является g, то класс $\hat{z}\,(gz)$ может состоять из m элементов и т.д. Например, классом $\hat{z}\,\{fz\}$ может быть класс $\{a, b\}$, а классом $\hat{z}\,\{gz\}$ – класс $\{a, b, c\}$ и т.д.

Более того, поскольку нас интересуют исключительно классы, то можно обойтись лишь одной из формально эквивалентных функций, так как соответствующие формально эквивалентным функциям классы совпадают. Символически последнее утверждение выражается следующим образом:

$$\vdash :.\ \phi x\ .\equiv_x .\ \psi x : \supset .\ \hat{z}\,\{\phi z\} = \hat{z}\,\{\psi z\},$$

и рассматривается Расселом как отличительная черта классов, которая означает, что функции, истинные для одних и тех же аргументов, задают один и тот же класс. Например, функции 'x – философ, отравленный по решению афинского собрания' и 'x – учитель Платона' будут задавать один и тот же класс, а именно $\{$*Сократ*$\}$. При экстенсиональном подходе, где важным является только однозначное задание класса, во всех случаях можно обойтись единственной функцией, игнорируя все другие, формально ей эквивалентные. Таким образом, каждому классу мы можем сопоставить одну-единственную задающую его функцию.

Причём такую функцию необязательно задавать содержательно, т.е. указывая на общее всем элементам класса свойство. Достаточно лишь указать на сами элементы. Такое указание можно получить, задав функцию, уравнивающую возможные значения своей переменной с элементами класса. Например, класс афинских тираноубийц можно задать так: $\hat{x}\,\{x = \textit{Аристогитон} \vee x = \textit{Гармодий}\}$. Нетрудно заметить, что заданный таким образом класс будет совпадать с любым другим классом, заданным посредством свойств, характерных только для *Аристогитона* и *Гармодия*.

Таким образом, учитывая подход Рассела к математике, мы, в общем случае, когда вводим классы, всегда можем обойтись высказываниями о существовании, которые истинны только для элементов данного класса, не указывая при этом на какое-то определённое свойство. Например, классу $\{a, b\}$ сопоставляется высказывание $(\exists x).(x = a \vee x = b)$, а классу $\{b, c\}$ – высказывание $(\exists x).(x = b \vee x = c)$ и т.д.

Функции подобного рода, т.е. включающие равенство, являются, согласно определению Рассела, предикативными, и в рамках математики ими можно заменить всякую формально эквивалентную им функцию. Этим мы как раз достигаем того упрощения, на которое при определении специфики математических высказываний указывал Рассел (см. §1.1). Теперь не важно, о каких конкретных свойствах идёт речь. Достаточно лишь с помощью равенства указать, какие значения может принимать соответствующая переменная. Таким способом можно задать любой класс, включая пустой и универсальный. Пустой класс Рассел, следуя Фреге, задаёт так: $\hat{x}\,\{\sim(x = x)\}$, а универсальный – $\hat{x}\,\{(x = x)\}$. То есть пустой класс – это класс не равных самим себе вещей, а универсальный класс – это класс вещей самотождественных. В этих пределах располагаются все другие классы, для одних из которых функция равенства истинна, а для других – ложна.

Если принять, что $\phi!x$, $\psi!x$, $\chi!x$ и т.д. являются в этом смысле выделенными (т.е. используют равенство) предикативными формально эквивалентными функциями, то каждая из них указывает на различные классы, скажем на $\hat{z}\,\{\phi z\}$, $\hat{z}\,\{\psi z\}$, $\hat{z}\,\{\chi z\}$ и т.д. Это, однако, выполнимо лишь при одном условии: элементы соответствующих классов должны быть различными, поскольку в противном случае эти классы могли бы пересекаться или даже совпадать. Действительно, если функция, задающая классы, указывает лишь на то, какие значения может принимать её аргумент, то аргументы различных функций могут совпасть, и мы тогда не получили бы различие классов. Скажем, в примере двумя абзацами выше a и c могли бы совпадать, тогда высказывания $(\exists x).(x = a \vee x = b)$ и $(\exists x).(x = b \vee x = c)$ были бы истинными для одних и тех же аргументов, а значит, задавали бы не разные классы, а один и тот же. Тогда введение особых, использующих равенство функций потеряло бы смысл. Поэтому если необходимо сохранить подход к математике, основанный на классах, необходимо, чтобы a, b, c были различны.

Рассел считает, что два элемента совпадают, если все их свойства одинаковы. Вернее, не все свойства, а только предикативные, поскольку можно представить ситуацию, когда свойства порядка n совпадают, а свойства порядка $n + 1$ – нет. Это служит для него дополнительным аргументом в пользу аксиомы сводимости, позволяющей ограничить все свойства предикативными. В общем случае определение равных элементов выглядит так:

$$a = b \,.\, =_{\mathrm{def}} : \ (\phi) : \phi!x \,.\supset \phi!y \ ,$$

т.е. a и b равны, когда все их предикативные свойства совпадают. Поскольку всякая предикативная функция задаёт класс и в нашем случае единственный класс, то это определение можно переформулировать следующим образом: a и b равны, когда они входят в одни и те же классы. Таким образом, при использовании функций, задающих классы, всегда необходимо различать их возможные аргументы, добавляя выражения типа $a \neq b$, $b \neq c$, $a \neq c$ и т.д. Например, к высказыванию о существовании $(\exists x).(x = a \vee x = b)$ следует добавлять $a \neq b$ для гарантии того, что соответствующий ему класс действительно является двухэлементным.

В рамках математики, как считает Рассел, всякое высказывание в принципе переводимо на язык отношений между классами. Например, для указанных выше классов $\hat{z}\,\{fz\}$ и $\hat{z}\,\{gz\}$ отношение между функциями, представленное высказыванием $(x).\ fx \supset gx$, указывающим на то, что все элементы, обладающие свойством $\hat{f}$, обладают и свойством $\hat{g}$, можно с помощью равенства выразить как включение класса $\{a, b\}$ в класс $\{a, b, c\}$ следующим образом:

$$(x) :.\ x = a \,.\vee.\, x = b : \supset : x = a \,.\vee.\, x = b \,.\vee.\, x = c.$$

Всё это облегчает задачу Рассела по сведению математики к логике. Следует, правда, учесть требования теории типов и чётко различать порядок элементов, которые могут образовывать классы. Любое высказывание об отношении между классами будет осмысленно только тогда, когда их элементы относятся к одному и тому же типу. Более того, не существует одного нулевого и универсального классов. Последние также различаются согласно типам, есть нулевой и универсальный классы для типа индивидов, для типа классов индивидов, для типа классов классов индивидов и т.д. В общем, здесь сохраняются все требования простой теории типов.

По примеру Фреге, Рассел вводит определение кардинального (количественного) числа, которое понимается как класс классов, находящихся во взаимно однозначном соответствии. Так, 0 – это число, соответствующее нулевому классу. 1 – это по определению класс всех классов, состоящих из единственного элемента, что формально выражается как

$$\hat{\alpha}\,\{(x) : x \in \alpha \,.\equiv.\, x = a\}.$$

2 – это класс всех классов, состоящих из двух элементов, т.е.

$$\hat{\alpha}\,\{(x) : x \in \alpha \,.\equiv.\, x = a \,.\vee.\, x = b : a \neq b\,\}$$

и т.д. Элементы a, b, c …, используемые при определении чисел, Рассел не вводит, подобно Фреге, отталкиваясь от пустого класса. Это нарушало бы принципы теории типов. Здесь логицистский подход требует модификации. Элементы a, b, c … не должны вводиться как конструкции типа $\varnothing$, $\{\varnothing\}$, $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$, $\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$..., но обязаны в каком-то смысле существовать. Поскольку классы производны, являясь абстракцией от индивидов, то эти элементы должны быть индивидами. Из них можно образовать классы любого типа. Но согласно определению, для каждого типа определяется свой натуральный ряд чисел, поскольку уже 0 требует указания на нулевой класс соответствующего типа. Точно так же определение 1 или 2 требует указания на классы, которые будут различаться согласно образующим их элементам. Поэтому нет одного нуля, единицы или двойки. Есть лишь ряды чисел, различающиеся в соответствии с типами.

Правда, эти числа можно уравнять, поскольку во взаимно однозначное соответствие можно сопоставить классы различных типов. Так, например, во взаимно однозначном соответствии находятся класс, состоящий из одного элемента, и класс, состоящий из одного этого класса (т.е. класс $\{a\}$ и класс $\{\{a\}\}$). Поэтому, если есть хоть один индивид, можно получить определение 1 для любого типа. Отталкиваясь от этого, следует стремиться получить определение числа для наибольшего типа, поскольку тогда мы всегда сможем применить его к типам, идущим в иерархии ниже.

Это особенно важно в связи с тем, что из n индивидов, как доказал Г. Кантор, можно образовать 2^n классов индивидов, 2^{2^n} классов классов индивидов и т.д. Следовательно, при наличии индивидов и ориентируясь на метод образования классов, можно было бы определить любое число натурального ряда. Так, если бы индивиды ограничивались *a* и *b*, то можно было бы определить число 2 – как образованный из них класс, число 4 – как класс, образованный из класса классов, используемых при определении числа 2, число 16 – как класс, образованный из класса классов, используемых при определении числа 4, и т.д. Затем с использованием арифметических операций вводятся все другие числа.

Правда, эти числа всегда были бы конечными, хотя, возможно, и сколь угодно большими. Даже сложение полученных таким образом чисел всегда давало бы лишь конечный результат.

Ограничиваться конечными числами Рассел не желает как минимум по двум причинам. Во-первых, при конечности чисел возникают недоразумения с аксиоматизацией арифметики, предложенной Дж. Пеано и которую Рассел считает наиболее пригодной для выразимости математических понятий в сугубо логических терминах [25, С. 72]; во-вторых, проблематичными становятся введённые Г. Кантором бесконечные кардинальные числа.

Что здесь вызывает возражения? Непосредственными следствиями аксиоматики Пеано являются утверждение о единственности 0 и то, что он не является последующим элементом никакого другого числа, а также утверждение о том, что никакие два числа не имеют в качестве последующего элемента одно и то же число. Допустим теперь, что индивиды, имеющие место в мире, ограничены числом n. Тогда с числами, следующим за n, при попытке определить их с точки зрения находящихся во взаимно однозначном соответствии классов, всегда будет соотнесён $\varnothing$, поскольку таких классов нет. Таким образом, получается, что за $n + 1$ и за $m + 1$ (при условии, что $m > n$) следует одно и то же число, которое к тому же является 0, а это противоречит всем принципам принятой аксиоматики.

Правда, если бы мы ограничились лишь конечными кардинальными числами, этим возражением можно было бы пренебречь, поскольку, образуя из индивидов классы, классы классов и т.д. в ряду натуральных чисел, мы всегда могли бы продвинуться далее. Основная проблема заключается в том, что конечность имеющих место в мире вещей не позволила бы определить канторовские бесконечные числа, типа $\aleph_0$, $2^{\aleph_0}$, поскольку они предполагают существование всего натурального ряда. А получить весь такой ряд, пусть даже и последовательным образованием классов, в силу указанных выше причин мы не можем.

Единственный выход, который из этой ситуации находит Рассел, заключается в предположении, что бесконечность исходных элементов, т.е. индивидов, дана изначально. Это положение формулируется в качестве аксиомы, так называемой ‘Аксиомы бесконечности’, которая в формулировке Рассела гласит, что ни один конечный класс индивидов не содержит всех индивидов (подробнее см. ниже § 4.1).

Непосредственным следствием этой аксиомы является то, что существуют классы, содержащие любое конечное число индивидов. Отсюда нетрудно перейти к определению бесконечных кардинальных чисел. Действительно, поскольку каждое конечное число в результате определяется как класс классов индивидов, находящихся во взаимно однозначном соответствии, то бесконечное кардинальное число, которое соотнесено с натуральным рядом (т.е. $\aleph_0$), будет определяться как число класса всех конечных чисел натурального ряда. Число $2^{\aleph_0}$, которое Г. Кантор считает следующим за $\aleph_0$ бесконечным кардинальным числом, будет определяться как класс классов конечных кардинальных чисел и т.д..

С точки зрения классов можно определить не только числа, но и арифметические операции: сумму, произведение, возведение в степень и т.д.. Возьмём, например, сумму. Начнём с того, что поскольку число есть класс классов, находящихся во взаимно однозначном соответствии, то, согласно сказанному выше относительно формально эквивалентных предикативных функций, в качестве представителя некоторого числа можно выбрать один из таких классов. Тогда разумно предположить, что сумма двух кардинальных чисел будет определяться как класс всех тех классов, которые находятся во взаимно однозначном отношении с классом, объединяющим элементы их представителей. Например, если класс $\{a, b, c\}$ есть представитель числа 3, а класс $\{d, e\}$ есть представитель числа 2, то представителем суммы этих чисел (т.е. числа 5) будет класс $\{a, b, c, d, e\}$. Важно здесь только то, чтобы представители классов не перекрывались. Действительно, если в данном примере, скажем, a и d совпадали бы, то мы не получили бы требуемую сумму, которая тогда была бы равна 4. Поэтому необходимо задать условие неперекрываемости классов. При отборе представителей это условие можно задать, например, с помощью введённой выше функции $x \neq y$, где x пробегает по элементам первого представителя, а y – второго.

Определение суммы можно расширить так, чтобы под него подпадали не только конечные, но и бесконечные числа. Возьмём два бесконечных неперекрывающихся класса. Поскольку из них нужно образовать новый класс, для определения числа которого нельзя обойтись механическим слиянием их элементов, то мы можем поступить следующим образом. При образовании нового класса будем следовать принципу отбора, при котором его нечётные элементы будем брать из первого класса, а чётные – из второго. Так мы получим требуемое бесконечное кардинальное число. Такое определение позволяет складывать любое конечное число бесконечных классов. Важно также и то, что под определение через принцип отбора подпадает сложение не только бесконечных, но и конечных кардинальных чисел. Достаточно лишь после выполнения процедуры отбора, если конечные числа были неравны, оставшиеся элементы последнего класса механически добавить к остальным.

Соответствующую процедуру можно задать и для произведения кардинальных чисел. Допустим, нам нужно перемножить всё те же классы $\{a, b, c\}$ и $\{d, e\}$. Из элементов этих классов мы можем образовать новые классы, удовлетворяющие следующему условию отбора: каждый из этих классов содержит в точности по одному элементу из первоначальных классов. Класс этих классов будет представлять собой конструкцию вида $\{\{a, d\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{a, e\}, \{b, e\}, \{c, e\}\}$. Нетрудно заметить, что число этого класса как раз и будет соответствовать произведению исходных чисел.

Подобный подход к произведению нетрудно обобщить на произвольное конечное число множителей. Пусть класс κ – это конечный класс множителей (удовлетворяющих условию неперекрываемости, которое, как и в случае с суммой, задаётся с помощью функции $x \neq y$). Тогда можно образовать класс (будем обозначать его как κ_μ и, следуя Расселу, будем называть его мультипликативным классом κ), включающий все те классы, которые содержат в точности по одному элементу первоначальных классов. Число мультипликативного класса κ_μ как раз и будет определять произведение элементов класса κ. Процедура здесь будет вполне аналогична той, что применялась в предыдущем абзаце к случаю двух классов с фиксированным количеством элементов. Более того, поскольку на класс κ не накладывалось ограничение, что его элементы должны быть конечными, такое определение применимо и к произведению бесконечных классов. Подобным образом вводится операция возведения в степень, так как её можно определить через произведение.

Можно показать, что введённые таким образом операции удовлетворяют всем свойствам, которые требуются арифметикой кардинальных чисел, как конечных, так и бесконечных, но только в том случае, если арифметические операции применяются конечное число раз (неважно, применяются они к конечным или же к бесконечным кардинальным числам). Доказательство этого факта является механической процедурой. Затруднение возникает тогда, когда эти операции используются бесконечное количество раз (неважно, применяются ли они к конечным или же бесконечным кардинальным числам). Это становится особенно ясно, когда мы чётко осознаём, что смысл самих операций тесно связан с принципом отбора, согласно которому упорядочиваются элементы суммируемых классов или образуется мультипликативный класс κ_μ.

Принцип отбора можно осуществить механически в случае конечного применения операций, но для бесконечных суммы, произведения или возведения в степень такой механический приём невозможен в силу характера самой бесконечности. Действительно, если складывается бесконечное количество классов, необходимо предполагать, что есть принцип отбора, задающий, какой элемент какого класса брать чётным, какой элемент какого класса брать кратным чётному, какой элемент какого класса брать нечётным, какой элемент какого класса брать кратным нечётным и т.д. Сама по себе процедура сложения этого определить не может. То же самое касается умножения. Образование мультипликативного класса κ_μ подчинено механической процедуре только в том случае, если количество элементов класса κ конечно. В противном случае за конечное число шагов невозможно проследить, что образованный класс κ_μ удовлетворяет условию отбора составляющих его элементов. В этом случае любой из элементов κ_μ станет необозримым, а тогда будет невозможно определить, удовлетворяет ли он принципу отбора, в соответствии с которым образуется сам мультипликативный класс κ_μ.

Таким образом, сам по себе принцип отбора, если он должен охватывать бесконечность применения операции, не вытекает из того, каким свойствам должна удовлетворять операция. Наоборот, если нам нужна операция, удовлетворяющая принципам оперирования с любыми кардинальными числами, как конечными, так и бесконечными, то должно быть задано условие отбора, не зависящее от того, рассматриваем ли мы конечные классы, бесконечные классы, сумму конечных классов, сумму бесконечных классов или бесконечную сумму как конечных, так и бесконечных классов. Это же условие касается произведения.

Но поскольку условие выбора, сформулированное в предыдущем параграфе, очевидно, нельзя обосновать как механическую процедуру при условии бесконечности шагов, Рассел вводит его как аксиому, а именно, аксиому мультипликативности: «Для всех взаимно неперекрывающихся классов, из которых ни один не является нулевым, имеется по крайней мере один класс, который имеет один, и только один термин, общий с каждым из данных классов». Эта аксиома мотивирована тем, что Рассел не принимает бесконечный принцип механического отбора, но, как указывалось выше относительно предпочтительности интенсионального способа задания классов, предполагает, что бесконечность, в том числе бесконечный отбор, следует задавать интенсионально, т.е. через определяющее свойство.

2. АКСИОМА СВОДИМОСТИ, ПРЕДИКАТИВНЫЕ ФУНКЦИИ И ТЕОРИЯ ТИПОВ РАМСЕЯ

2.1. Эмпирический характер аксиомы сводимости

Как указывалось выше, Рамсей не относит аксиому сводимости к числу логических принципов, относя её истинность на «милость судьбы». Формулировка этой аксиомы у Рассела удовлетворяет необходимому критерию математических положений, она действительно обладает общностью формы. Однако если мы следуем критерию достаточности, который Рамсей заимствует у Витгенштейна, то этот критерий не выполняется. Аксиома сводимости может быть истинной, но нет ничего невозможного и в истинности её отрицания, а значит, она не является тавтологией.

Если ограничиться конечным числом индивидов или конечным числом функций, то истинность этой аксиомы кажется почти неизбежной. В этом случае любой класс можно было бы, например, задать, как делалось выше, с помощью равенства, которое является предикативной функцией в смысле Рассела. Однако при рассмотрении случая, где число индивидов и функций бесконечно, содержание аксиомы становится проблематичным. Она, разумеется, может быть истинной, поскольку нет ничего невозможного или самопротиворечивого в том, чтобы каждый класс индивидов задавался некоторой предикативной функцией. Но она может быть и ложной. Для этого достаточно продемонстрировать возможность конструирования такой непредикативной функции, которую нельзя свести к предикативной. И такую функцию можно построить.

Так, допустим, что совокупность предикативных функций бесконечна, тогда вполне возможно, чтобы существовал такой индивид *a* из опять же бесконечной совокупности индивидов, который обладал бы следующей особенностью: он выполняет все предикативные функции, что и некоторый индивид из той же совокупности, за исключением функции, которая рассматривается в данный момент.

Возьмём теперь непредикативную функцию, включающую мнимую переменную, пробегающую по предикативным функциям, вида

$$Fx =_{\text{def.}} (\phi).\phi!x \equiv \phi!a.$$

Рамсей утверждает, что при принятых условиях для этой функции аксиома сводимости работать не будет [17. С. 81]. Действительно, согласно аксиоме сводимости непредикативной функции Fx должна соответствовать предикативная функция, скажем $\psi!x$. Но согласно поставленному условию $\psi!x$ как раз и будет функцией, рассматриваемой в данной момент, и, следовательно, будет существовать индивид, согласующийся с a во всех функциях, кроме $\psi!x$. То же самое будет и с любой другой функцией, претендующей на роль предикативного аналога Fx. Правда, здесь важно условие бесконечности области функций и области индивидов, потому что в противном случае можно было бы задать предикативной аналог функции Fx, перечисляя те индивиды, которые согласуются с a относительно $\psi!x$, и указывая на тот, который не согласуется. Но само это перечисление выражалось бы функцией, для которой, согласно выраженным выше условиям, существовал бы индивид, согласующийся с a во всех функциях, за исключением этой. В случае бесконечной области индивидов и функций это продолжалось бы до бесконечности, т.е. каждая попытка представить предикативный аналог указанной выше непредикативной функции давала бы опять непредикативную функцию, что требовало бы построения нового предикативного аналога уже этой непредикативной функции и т.д.[1] Следовательно, пре-

[1] Аргумент Рамсея против аксиомы сводимости можно проинтерпретировать несколько иначе, основываясь на идее Витгенштейна, что общность представима в виде конъюнкции, что позволяет Рамсею модифицировать расселовское понятие предикативной функции (об этом см. ниже § 2.3). Этот подход акцентирует внимание на том, что при заданных условиях проблематично представить бесконечную конъюнкцию, которую можно было бы рассматривать в качестве предикативного аналога непредикативной функции. Приведём здесь реконструкцию аргумента Рамсея у Альмедиа Маркеса: «Рамсей утверждает, что можно рассмотреть различные конфигурации, но что он ограничится рассмотрением самой интересной из них, а именно, тем миром, в котором как число индивидов, так и число атомарных функций бесконечны… Перейдём к рассмотрению условий Рамсея: 1. Имеется бесконечное число индивидов; 2. Имеется бесконечное число атомарных функций индивидов; 3. Имеется индивид a с некой атомарной функцией и имеется другой индивид, согласующийся с a во всех функциях, кроме этой *некой*… Непредикативная функция, которую Рамсей вводит для проверки общезначимости аксиомы, – это $(\phi).\phi!x \equiv \phi!a$. Эта функция, как видно, выполняется всеми индивидами, которые имеют общие предикативные свойства с индивидом a, или такими, которые согласуются с этим индивидом в отношении всех предикативных функций. Согласно аксиоме сводимости

дикативный аналог Fx при заданных условиях синтаксически построить невозможно и, по крайней мере в данной интерпретации, аксиома сводимости не работает. Возможность как истинности, так и ложности показывает, что аксиома сводимости

> является эмпирической пропозицией, другими словами, не является ни тавтологией, ни противоречием и, следовательно, не может ни утверждаться, ни отрицаться логикой или математикой [17. С. 81].

Поэтому, от этой аксиомы нужно избавиться, сохранив по возможности те результаты, которые получены с её помощью. Выше было показано, что необходимость в аксиоме сводимости в структуре *PM* была вызвана стремлением согласовать разветвлённую теорию типов с практикой математических рассуждений. Таким образом, обоснованность введения аксиомы сводимости связана с обоснованностью того варианта этой теории, к которому в конечном счёте пришёл Рассел. И этот вариант Рамсей предлагает модифицировать.

должна существовать предикативная функция, выполняемая теми же самыми индивидами, что выполняют и непредикативную функцию $(\phi).\phi!x \equiv \phi!a$. Чтобы показать ложность аксиомы, необходимо только показать, что условия, оговариваемые Рамсеем, не допускают существования такой функции. По-видимому, Рамсей утверждает, что необходимое и достаточное условие, чтобы индивид согласовывался с a во всех предикативных функция, – это условие, чтобы он согласовывался с a во всех атомарных функциях. Рассмотрим это. Предположим, что проблема состоит в том, чтобы найти предикативную функцию $\psi!x$, которая была бы эквивалентна функции $(\phi).\phi_{at}x \equiv \phi_{at}a$, где$\phi_{at}$ – это совокупность атомарных функций. Это – непредикативная функция от x, которая, однако, согласуется с аксиомой сводимости. Проверим, в какой степени условия Рамсея мешают разрешению проблемы. Если число атомарных функций этой модели было бы конечным, $\psi!x$ можно было бы легко определить конъюнкцией всех атомарных функций, выполняемых индивидом a, и отрицанием всех, которые a не выполняет. Но второе условие Рамсея не позволяет этого сделать, хотя оно также не позволяет говорить о невозможности случайным образом найти результат, эквивалентный для большинства высказываний из конечного числа атомарных функций. Это, впрочем, исключается третьим условием Рамсея. Факт, что комбинация атомарных функций имеет конечное число функций, сталкивается с фактом, что обязательно существует бесконечное число атомарных функций, не включённых в конструкцию $\psi!x$. И для каждой из этих функций имеются гипотетические индивиды, которые не согласуются с индивидом a в этой функции, хотя они согласуются с ним во всех остальных атомарных функциях и, следовательно, в отношении всех тех функций, которые связаны с конструкцией $\psi!x$. Соответственно, $\psi!x$ не может быть эквивалентом непредикативной функции $(\phi).\phi_{at}x \equiv \phi_{at}a$, хотя она и допускает в своём объёме индивиды (в сущности бесконечное их число), которые не согласуются с индивидом a во всех атомарных функциях. Следовательно, не существует предикативной функции, эквивалентной этой функции, и аксиома сводимости здесь не срабатывает» [45. P. 22–25].

2.2. Классификация парадоксов

Вернёмся к парадоксам, поскольку именно для их решения и была предложена разветвлённая теория типов. В отличие от Рассела, который все парадоксы выводит из принципа порочного круга, Рамсей разделяет их на две группы. К *Группе А* относятся парадоксы Рассела, Кантора, Бурали-Форти и им подобные, т.е. все те парадоксы, для решения которых достаточно простой теории типов; к *Группе В* относятся парадоксы *Лжеца*, Ришара, Грелинга и т.п., для решения которых потребовалось расширить простую теорию типов до разветвлённой. Фундаментальную важность такого различия Рамсей видит в следующем:

> Группа *А* состоит из противоречий, которые, если против них не принять меры предосторожности, встречались бы в самих логических и математических системах. Они включают только логические или математические термины, такие как класс и число, и показывают, что здесь должна быть какая-то ошибка с нашей логикой или математикой. Но противоречия группы *В* не являются чисто логическими и не могут быть сформулированы в одних логических терминах, ибо все они содержат некоторую отсылку к мысли, языку или символизму, которые являются не формальными, но эмпирическими терминами. Поэтому своим возникновением они могут быть обязаны не ошибочной логике или математике, но ошибочным идеям, касающимся мысли и языка. Если это так, их не следует относить к математике или логике, если под ‘логикой’ мы подразумеваем символическую систему, хотя они, конечно, относятся к логике в смысле анализа мысли [17. С. 38].

Рамсей отказывается выводить все парадоксы из единственного принципа порочного круга, как делает Рассел. На самом деле теория типов *PM* состоит из двух различных разделов:

> Противоречия группы *А* устраняются указанием на то, что пропозициональная функция не может значимо принимать саму себя в качестве аргумента, и разбиением функций и классов на иерархию типов в соответствии с их возможными аргументами. Так, утверждение, что класс является членом самого себя, не истинно и не ложно, но бессмысленно [17. С. 43].

Здесь достаточно развести по разным типам функции и соответствующие им аргументы, не различая порядки функций от аргументов одного и того же типа. Таким образом, этот раздел ограничивается простой теорией типов и не нуждается в разветвлённой.

Источником парадоксов второй группы является не символическая система логики и основанная на ней математика, а лингвистический или, как предпочитает говорить Рамсей, эпистемологический элемент:

> Противоречия группы *B* не являются чисто логическими; все они содержат некоторый эпистемологический элемент, такой как ложь, значение или наименование. (Под эпистемологическим элементом я подразумеваю связь с отношением знака к обозначаемой вещи, которое включает отношение мыслящего или мысли к своему объекту). Следовательно, появление таких противоречий, помимо того, что оно может быть обязано ошибочности самой логики, может быть обязано просто некоторому противоречию, скрытому в наших идеях значения и мысли или в том способе, которым мы используем наши слова. В этом и заключается отстаиваемая мной точка зрения, а именно, что противоречия группы *B* относятся к эпистемологии, но не к символической логике, и их не нужно принимать в расчёт при конструировании правил символической логики, частью которой является теория типов… Различие функций на предикативные, первопорядковые и т.д., пробегающих по одной и той же области аргументов, было основано Расселом не только на необходимости избежать эти противоречия, но также на его принципе порочного круга, непосредственным следствием которого, как казалось, они являлись [81. P. 85][1].

Стало быть, если здесь и необходимо какое-то различие, оно не должно иметь отношения к различию функций и аргументов, важному для целей собственно логики и математики. Значит, и здесь разветвлённая теория типов, как она представлялась Расселу, оказывается излишней.

Иными словами, раз парадоксы имеют различный источник, то совершенно не обязательно создавать теорию, которая решала бы их единообразно, основываясь на принципе порочного круга[2]. И если

---

[1] Парадоксы группы *B*, в отличие от логических парадоксов группы *A*, имеющих теоретико-множественный характер, ныне принято называть семантическими.

[2] Этот тезис можно усилить, как делает У. Майер, указывая на то, что универсальное трактовка принципа порочного круга (или непредикативных определений) как универсального источника парадоксов не только не соответствует действительному положению дел, но и наносит теории существенный вред: «Рамсей не разделяет того мнения, что необходимо избегать непредикативных определений *per se*, поскольку они с необходимо-

первый раздел *PM*, связанный с решением парадоксов группы *A*, представляется Рамсею неизбежным, то второй раздел при соответствующей трактовке теории типов из оснований математики вполне можно исключить[1].

Таким образом, задача заключается в следующем: во-первых, необходимо показать, что функции одного и того же типа при выведении математики из логики не требуют различения на порядки; во-вторых, необходимо показать, что различие функций одного и того же типа на порядки не имеет к такому выведению никакого отношения. Нетрудно заметить, что тем самым ненужной оказывалась бы и аксиома сводимости, поскольку исчезала бы причина, по которой её требовалось ввести.

Устранение аксиомы сводимости из оснований математики – не единственное следствие развиваемого Рамсеем подхода. Устранение аксиомы сводимости есть отрицательный результат, приводящий к ненужности разветвлённой теории типов. То, что последняя не нужна, дополняется позитивным результатом, дающим способ решения парадоксов на совершенно ином основании. Здесь различие

стью приводят к противоречиям. Наоборот, он доказывает, что решение Расселом парадоксов вводит в заблуждение как раз потому, что он приписывает вторую группу парадоксов непредикативным определениям. Согласно точке зрения Рамсея, это было фундаментальной ошибкой. Дело не только в том, что действительной причиной парадоксов второй группы являются ‘двусмысленности значения’, но и в том, что ложный диагноз причин парадоксов приводит также (через терапию посредством разветвления типов на ‘иерархию порядков’) к неприемлемым следствиям» [66. P. 174].

[1] Следует отметить, что у некоторых математиков, ориентированных на формалистский подход, который во главу угла ставит синтаксис, имеется тенденция игнорировать это различие. Ср., например, утверждение Х. Карри: «По мнению Рамсея, парадоксы группы *A* содержат только понятия, которые естественно считать принадлежащими логике или математике, тогда как парадоксы группы *B* содержат понятия именования, определения, истины и т.д., которые не являются строго математическими, но принадлежат скорее эпистемологии, лингвистике и т.п., так что эти парадоксы вообще незачем рассматривать. В наше время парадоксы рамсеевой группы *A* называют обычно *логическими* парадоксами, а парадоксы группы *B* – *семантическими* (иногда «эпистемологическими») парадоксами. Рамсей был не совсем прав, считая, что математикам не к чему интересоваться семантическими парадоксами, и некоторые из самых значительных результатов современной логики обязаны своим появлением как раз более глубокому изучению этих парадоксов. Поскольку два вида парадоксов были определены только на примерах, это различие довольно-таки расплывчато, и в современной логике проявляется тенденция вообще игнорировать его» [8. С. 25–26]. Карри верно отмечает, что нет общего критерия различия этих групп парадоксов. Однако работы по математической логике часто ограничиваются констатацией этого различия и акцентируют внимание на тех аспектах теории, которая ограничивается парадоксами группы *A*. Лишь Рассел и Рамсей попытались разрешить обе группы парадоксов в рамках единой теории.

логического и эпистемологического элемента в средствах выражения даёт построение новой теории типов, не просто другой теории типов, нежели в *PM*, но теории типов, построенной на существенно иных основаниях. Достижение этого позитивного результата требует изменения содержания некоторых базовых понятий, с помощью которых строится разветвлённая теория типов.

2.3. Модификация понятия предикативной функции

Решение, предлагаемое Рамсеем, возвращает нас к теории Витгенштейна, в частности, к первому из её следствий, указанных в конце § 1.2. Наиболее важными здесь являются три последовательно вытекающих друг из друга момента:

1. Витгенштейн различает высказывание (пропозицию) и способы его выражения. Действительно, пропозиция – это согласование условий истинности атомарных высказываний, а поскольку выразить такие согласования можно различным образом, то необходимо отличать саму пропозицию от способов выражения этих согласований. Используя для согласования различные логические союзы, мы лишь по-разному строим одну и ту же пропозицию. Например, табл. 2 – это высказывание, которое может быть выражено следующими способами: '$\sim(\sim p \,.\, q)$', '$p \vee \sim q$', '$\sim p \supset \sim q$' и т.д. Какой бы из способов выражения мы ни выбрали, пропозиция, соответствующая табл. 2, ложна только в том случае, когда p – ложно, а q – истинно, и истинна во всех остальных случаях.

Отсюда вытекает, что логические союзы есть лишь способ построения выражений согласования и не имеют собственного значения. То есть комбинация логических союзов выражает одну и ту же пропозицию, если в конечном счёте с высказываниями p, q и т.д., из которых она построена, согласуются одни и те же условия истинности. В общем случае любая комбинация p, q и т.д. с логическими союзами выражает одну и ту же пропозицию, если они согласуются с одинаковыми условиями истинности. Поэтому комбинации вида '$\sim(\sim p \,.\, q)$', '$p \vee \sim q$', '$\sim p \supset \sim q$' и т.д. есть лишь символы для выражения одной и той же пропозиции.

Таких комбинаций может быть бесконечное множество. Более того, среди них могут быть такие, которые мы не только не построили актуально, но и не можем построить за конечное число шагов. Однако, как считает Рамсей, возможность такого построения зависит от наших познавательных способностей и не может оказывать влияние на объективное содержание формальной логики. Если задана пропозиция с условиями согласования истинностных возможностей, то логикой должна предполагаться вся область возможных выражений, не важно, строятся ли они за конечное число шагов, или же могут быть построены, допуская лишь бесконечное.

2. Бесконечная область возможных выражений важна тогда, когда она не ограничена логическими союзами, а включает выражения общности. Напомним, что, с точки зрения Витгенштейна, мы используем выражения общности, чтобы охватить бесконечный или, возможно, конечный, но необозримый класс высказываний. Эта необходимость возникает тогда, когда, например, в ряду атомарных высказываний вида ‘*fa*’, ‘*fb*’, ‘*fc*’ … не хватает имён для индивидов. В этом случае, для того чтобы выразить пропозицию, устанавливающую согласования истинности для конъюнкции таких высказываний, мы используем выражение ‘$(x).fx$’.

Отметим, что если бы класс индивидов a, b, c … был конечен, то выражение ‘$(x).fx$’ в любом контексте можно было бы заменить на конъюнкцию ‘$fa\ .\ fb\ .\ fc$ …’, поскольку тогда согласования условий истинности соответствующих атомарных высказываний совпали бы. Здесь мы получаем различные способы выражения одной и той же пропозиции, которые мы можем актуально построить.

Сложности возникают при бесконечной области индивидов. Здесь может недоставать не только имён для индивидов, но и способов построения высказываний, в которые эти индивиды входят. Так, уже в простейшем случае ‘$(x).fx$’, если нет возможности указать все имена индивидов, мы не в состоянии привести пример бесконечной конъюнкции, имеющей те же самые условия истинности.

Но здесь, как считает Рамсей, возможность актуального построения связана с ограниченностью наших познавательных способностей. Логика, однако, не должна быть ограничена познавательными способностями человека. В общем случае, независимо от списка имён (конечного или бесконечного) и способов утверждения высказываний, мы должны предполагать, что любое высказывание может утверждаться как с помощью выражений общности (типа ‘все’ или ‘некоторый’), так и с помощью логических союзов (конъюнкции, дизъюнкции и т.п.). Возможность согласования условий истинности атомарных высказываний не должна зависеть от способности строить лишь конечные последовательности символов. Если пропозиция устанавливает согласование условий истинности атомарных высказываний вообще, то в принципе это должно выражаться как конечным, так и бесконечным образом. Здесь должно работать правило, что логика имеет дело с любой возможностью, как конечной, так и бесконечной. Первая отличается от второй лишь недостатком времени и места у того, кто с ними работает. Поэтому, конечность или бесконечность последовательности высказываний вида ‘*fa*’, ‘*fb*’, ‘*fc*’ … роли не играет[1]. И в том, и в другом случае подразумевается одно и то же, хотя в символических системах это и выражается различными способами. Если первое, как правило, выражается с помощью логических союзов, то второе использует выражения общности.

3. Для Рассела определяющее значение имело деление функций и построенных из них пропозиций на элементарные и неэлементарные. Первые используют только логические союзы и, стало быть, могут быть построены за конечное число шагов, если известны рассматриваемые в качестве аргументов атомарных функций индивиды. Так, при конечности класса $\{a, b, c \ldots\}$ любое высказывание об этом классе выразимо комбинацией атомарных высказываний ‘*fa*’, ‘*fb*’, ‘*fc*’ … с логическими союзами. Но если класс $\{a, b, c \ldots\}$ бесконечен или необозрим, то высказывание, нечто утверждающее обо *всех* или

[1] Следует отметить, что это не только техническое изменение, оно основано на философской предпосылке. У. Майер утверждает: «Отталкиваясь от классического понятия ‘атомарного высказывания’, которое является либо истинным, либо ложным, мы, прежде всего определяем, что представляет собой ‘истинностная функция’ в смысле Рамсея. Она является истинностной функцией во вполне *обычном* смысле, обладая истинностными значениями высказываний в качестве аргументов, но с одним важным отличием: её возможные аргументы не ограничены конечным числом, она может иметь бесконечное число аргументов, т.е. бесконечное число атомарных высказываний, чьи истинностные значения *однозначно* определяют её истинностное значение. Разумеется, это решение провоцирует вопросы: Для чего это нужно? Чего мы этим достигаем? Мы никогда не образуем высказывания из бесконечной цепи атомарных высказываний… Ответ вызван ‘философской’ идеей: могут существовать бесконечные высказывания, безотносительно к тому, можем мы их выразить или же нет. Их существование зависит только от их объективного бытия» [66. P. 176]. Техническая идея связана с философской именно тем, что реализация первой невозможна без предположения второй. У. Майер продолжает: «Первую проблему, которая вырастает из идеи ‘истинностных функций с бесконечным множеством аргументов’, Рамсей пытается скомпенсировать философской идеей, что вещей существует *больше*, чем мы можем наименовать, чтобы обозначить… В одном смысле это утверждение, выражающее философскую идею, является тривиально истинным. Как только мы, во-первых, согласны, что существует бесконечно много чисел, и, во-вторых, что наши средства, которыми мы обозначаем их индивидуально, строго конечны, это утверждение тогда, действительно, корректно… С другой стороны, это утверждение далеко от очевидности, если мы не предполагаем, что математические сущности, типа чисел, функций, множеств и т.д., существуют *реально*, но являются *символическими конструкциями*» [66. P. 178].

некоторых его элементах, должно включать выражения общности. Такие высказывания Рассел считал неэлементарными, поскольку они, помимо элементов, включают указание на весь класс.

Но проведённое Витгенштейном различие между пропозициями и их выражениями вкупе с утверждаемой независимостью логической теории таких пропозиций от возможности построения их выражений приводит Рамсея к тому, что

> некоторые примеры пропозиций могут быть элементарными, а некоторые – неэлементарными, так что элементарность на самом деле является характеристикой не пропозиции, но её способа выражения. ‘Элементарная пропозиция’ подобна ‘высказанному слову’; подобно тому, как одно и то же слово может быть и сказано и написано, так и одна и та же пропозиция может быть выражена как элементарно, так и не элементарно [17. С. 55].

То есть ‘$(x).fx$’ и ‘$fa\ .\ fb\ .\ fc\ \ldots$’ могут соответствовать одной и той же пропозиции, и различие затрагивает здесь не её саму, поскольку речь идёт лишь о согласовании возможностей истинности атомарных высказываний, но способы её выражения, где символ ‘$fa\ .\ fb\ .\ fc\ \ldots$’ является элементарным, а символ ‘$(x).fx$’ – нет. Как пишет Рамсей,

> …предположим, что создан список из всех индивидов ‘a’, ‘b’, … , ‘z’. Тогда, если бы $\phi\hat{x}$ была элементарной функцией, то ‘$\phi a\ .\ \phi b\ .\ \ldots\ \phi z$’ была бы элементарной пропозицией, а ‘$(x)\ .\ \phi x$’ – неэлементарной; но они выражали бы согласование с одними и теми же возможностями и, стало быть, были бы одной и той же пропозицией. Или возьмём пример, который действительно может встретиться, ‘ϕa’ и ‘$\phi a : (\exists x)\ .\ \phi x$’ являются одной и той же пропозицией, поскольку $(\exists x).\ \phi x$ ничего не добавляет к ϕa. Но первая является элементарной, а вторая – неэлементарной [17. С. 54−55].

Предыдущие замечания относились к функциям и пропозициям первого порядка, но их можно распространить на функции и пропозиции более высоких порядков. Правда, здесь необходимы некоторые изменения.

Для Рассела элементарные высказывания суть результат приписывания индивидов функциям первого порядка, элементарными являются также все высказывания, образованные из предыдущих с помощью логических союзов. Например, из функций $\phi\hat{x}$, $\psi\hat{x}$ … можно образовать элементарные высказывания типа ‘ϕa’, ‘ψa’, ‘ϕb’, ‘$\sim\psi b$’, … ‘$\phi a.\psi a$’, ‘$\sim(\phi a \vee \sim\psi b)$’ … и т.д. Если содержательные особенности функций и аргументов безразличны для некоторых или всех случаев, то элементарными будут и высказывания типа ‘p’, ‘q’ … ‘$\phi a.p$’, ‘$\phi a \vee p$’ … и т.д. Неэлементарные высказывания возникают тогда, когда необходимо указать на все или некоторые индивиды, класс которых, возможно, необозрим. Например, ‘$(x).\phi x$’, ‘$(x):\phi x.\psi x$’, ‘$(x):\phi x.p$’, ‘$(\exists x):\psi x.p$’ … и т.д. будут неэлементарными. Понятия элементарности и неэлементарности, используя подход Витгенштейна, можно распространить на функции и пропозиции любого порядка.

Напомним, что этот подход для любой пропозициональной функции первого порядка отсылает не к множеству индивидов, а к множеству высказываний. Так, область значения $\phi\hat{x}$ образуют не индивиды a, b, c …, но высказывания ‘ϕa’, ‘ϕb’, ‘ϕc’ …, которые обладают определёнными условиями истинности. Здесь функция $\phi\hat{x}$ указывает не на объективную совокупность индивидов, но на совокупность высказываний, условия согласованности истинности которых можно указать различными способами, как элементарным, так и неэлементарным. В этом случае ‘a’, ‘b’, ‘c’ … должны рассматриваться как значки (или имена) индивидов, которые могут входить как в символ ‘$\phi a.\phi b.\phi c$ …’, так и в символы других видов, например ‘$\sim(\sim\phi a \vee \sim\phi b \vee \sim\phi c$ …)’. При этом мы можем использовать и неэлементарный символ ‘$(x).\phi x$’, когда не хватает имён для индивидов, но, как указывалось выше, это для логики не существенно. И в том, и в другом случае функция $\phi\hat{x}$ указывает на совокупность высказываний, имеющих одно и то же согласование истинностных возможностей.

Отсылка к символам, а не к индивидам для Рамсея является наиболее существенной, поскольку она позволяет рассмотреть выражения общности единообразно, независимо от того, к какому порядку выражений они применяются. Возьмём, например, функцию второго порядка $f(\phi\hat{x})$, пробегающую по различным значениям $\phi\hat{x}$, выразить которые мы можем как $\phi_1\hat{x}$, $\phi_2\hat{x}$, $\phi_3\hat{x}$ … Каждое из этих выражений является символом, который указывает на совокупность элементарных пропозиций, являющихся их возможными значениями, где место переменной занимает имя индивида. Так, областью значений выражения ‘$\phi_1\hat{x}$’ является совокупность высказываний ‘$\phi_1 a$’, ‘$\phi_1 b$’, ‘$\phi_1 c$’ …, для которой согласование условий истинности может указываться как элементарно (т.е. имея вид ‘$\phi_1 a.\phi_1 b.\phi_1 c$ …’), так и не элементарно (т.е. имея вид ‘$(x).\phi_1 x$’). Точно так же областью значения $\phi_2 \hat{x}$ является совокупность высказываний ‘$\phi_2 a$’, ‘$\phi_2 b$’, ‘$\phi_2 c$’ …, согласованность которых выражается как элементарно (т.е. имея вид ‘$\phi_2 a.\phi_2 b.\phi_2 c$ …’), так и не элементарно (т.е. имея вид ‘$(x).\phi_2 x$’). То же самое относится к $\phi_3 \hat{x}$ и т.д.

Так как для $\phi_1 \hat{x}$, $\phi_2 \hat{x}$, $\phi_3 \hat{x}$ … имена индивидов ‘a’, ‘b’, ‘c’ … не варьируются, мы можем рассматривать совокупности высказываний, для которых варьируем функции, например ‘$\phi_1 a$’, ‘$\phi_2 a$’, ‘$\phi_3 a$’ …, ‘$\phi_1 b$’, ‘$\phi_2 b$’, ‘$\phi_3 b$’ …, ‘$\phi_1 c$’, ‘$\phi_2 c$’, ‘$\phi_3 c$’ …

Функция $f(\phi\hat{x})$ как раз и указывает на такие множества высказываний. Выражая согласование условий истинности таких высказываний, мы можем использовать как символ вида ‘$\phi_1 a.\phi_2 a.\phi_3 a$ … $\phi_1 b.\phi_2 b.\phi_3 b$ … $\phi_1 c.\phi_2 c.\phi_3 c$ …’, так и символ вида ‘$(\phi).(\phi a)\ .\ (\phi).(\phi b)\ .\ (\phi).(\phi c)$. …’, т.е. это согласование может быть выражено как элементарно, так и не элементарно. Если при этом не достаёт имён для индивидов, можно вновь воспользоваться переменной, записав выражение согласования условий истинности как ‘$(\phi, x).(\phi x)$’. Это неэлементарное выражение используется тогда, когда невозможно актуально (т.е. за конечное число шагов) построить символ первого вида, но, как указывалось выше, для логики это безразлично.

Подход Витгенштейна, т.е. подход, где в качестве значения функций рассматриваются высказывания, легко распространить на функции любого вида. Для функций типа $f(\phi\hat{x}).p$, $f(\phi\hat{x})\vee p$ …, например, это очевидно. Но рассмотренные до сих пор функции были одноместными. Однако нет никаких препятствий для того, чтобы перейти к n-местным функциям. Здесь самый простой случай, когда переменные относятся к одному и тому же типу. Так, $\phi(\hat{x}, \hat{y})$ указывает на согласование истинностных возможностей высказываний вида ‘$\phi(a,b)$’, ‘$\phi(b,a)$’, ‘$\phi(a,c)$’ … Это согласование мы можем выразить как элементарно для обеих переменных, если их значения обозримы, так и не элементарно для каждой или обеих из переменных. В первом случае согласованию будет соответствовать выражение вида ‘$\phi(a,b).\phi(b,a).\phi(a,c)$ …’, во втором – ‘$(x):\phi(x,a).\phi(x,b).\phi(x,c)$ …’ или ‘$(x):\phi(a,x).\phi(b,x).\phi(c,x)$ …’, в третьем – ‘$(x,y):\phi(x,y)$’.

Перейдём теперь к функциям вида $f(\phi\hat{x}, y)$. Здесь аргументы относятся к разным типам. Однако соответствующее множество пропозиций будет строиться так же, как и в предыдущих случаях, правда, с учётом некоторых особенностей, заставляющих при подстановке на место переменных выражений разных типов усложнить построение области определения подобной функции.

Начнём с предположения, что $\phi\hat{x}$ указывает на согласование истинностных возможностей соответствующих высказываний не элементарно, тогда как для y допустим как неэлементарное, так и элементарное выражение. Тогда на область значения $f(\phi\hat{x}, y)$, т.е. на совокупность высказываний, для которых эта функция устанавливает согласование истинностных возможностей, если заданы имена 'a', 'b', 'c' …, можно указать символом '$(\phi,y):(\phi\hat{x}, y)$' в первом случае и символом '$(\phi):f(\phi\hat{x}, a) \,.\, f(\phi\hat{x}, b) \,.\, f(\phi\hat{x}, c) \ldots$' во втором.

Остановимся на втором случае. Поскольку 'a', 'b', 'c' … остаются константами, выражения, в которые они входят, можно проиндексировать, сопоставив ряду 'a', 'b', 'c' … ряд 1,2,3 …, и записав '$(\phi):f(\phi\hat{x}, a) \,.\, f(\phi\hat{x}, b) \,.\, f(\phi\hat{x}, c) \ldots$' как '$(\phi):f_1(\phi\hat{x}) \,.\, f_2(\phi\hat{x}) \,.\, f_3(\phi\hat{x}) \ldots$'. Теперь каждый конъюнкт из '$(\phi):f_1(\phi\hat{x}) \,.\, f_2(\phi\hat{x}) \,.\, f_3(\phi\hat{x}) \ldots$', где он выражен не элементарно, можно записать элементарно, согласно алгоритму, указанному четырьмя абзацами выше для одноместных функций от функций. Так, например, конъюнкт '$(\phi).f_1(\phi\hat{x})$', при заданных 'a', 'b', 'c' …, записывается в виде '$f_1(\phi_1 a).f_1(\phi_1 b).f_1(\phi_1 c) \ldots$', конъюнкт '$(\phi).f_2(\phi\hat{x})$' – в виде '$f_2(\phi_1 a).f_2(\phi_1 b).f_2(\phi_1 c) \ldots$' и т.д.

Таким образом, неэлементарное выражение '$(\phi):f_1(\phi\hat{x}) \,.\, f_2(\phi\hat{x}) \,.\, f_3(\phi\hat{x}) \ldots$' согласования истинностных возможностей, устанавливаемого функцией $f(\phi\hat{x}, y)$, в конечном счёте можно представить элементарно в виде '$f_1(\phi_1 a).f_1(\phi_1 b).f_1(\phi_1 c)\ldots \,.\, f_2(\phi_1 a).f_2(\phi_1 b).f_2(\phi_1 c)\ldots \,.\, f_3(\phi_1 a).f_3(\phi_1 b).f_3(\phi_1 c) \ldots \,.\, \ldots$'.

Отметим, что к подобным согласованиям всегда можно присоединить простые высказывания вида p, q …, если встречающиеся в них имена независимы от таковых в выражениях типа $f_1(\phi_1 a)$ и т.п. При согласовании пропозиции '$(\phi):f_1(\phi\hat{x}) \,.\, f_2(\phi\hat{x}) \,.\, f_3(\phi\hat{x}) \ldots \,.\, p \,.\, q \ldots$' результат будет тот же самый, что и при согласовании пропозиции ‘$f_1(\phi_1 a).f_1(\phi_1 b).f_1(\phi_1 c)\ldots\ .\ f_2(\phi_1 a).f_2(\phi_1 b).f_2(\phi_1 c)\ldots\ .\ f_3(\phi_1 a).f_3(\phi_1 b).f_3(\phi_1 c)\ \ldots\ .\ \ldots\ .\ p\ .\ q\ .\ \ldots$’.

Представленные выше соображения нетрудно распространить как на аргументы различного типа, так и на функции различной местности. Однако заметим, что с точки зрения возможности конечного построения согласования истинностных возможностей высказываний, включающих функции от функций и от индивидов, могут выглядеть проблематичными. Но эта проблематичность затрагивает строящего их логика, но не логику как объективную науку. Заданный выше алгоритм действительно показывает, каким образом любое высказывание (о конечной или же бесконечной области индивидов, как считает Витгенштейн, и, что самое важное, к нему присоединяется Рамсей) производно от атомарных высказываний. В любом случае согласование условий истинности каждого высказывания, какого типа аргументы и функции оно не включало бы, зависит от возможностей истинности атомарных высказываний, которые могут быть определены для разных случаев либо конечно, как в случае приведённых выше таблиц истинности, так и бесконечно, что относится к объективности формальной логики как науки.

Таким образом, введение общности в структуру функции ничего не меняет в её значении. Действительно, используя истинностные функции типа конъюнкции, мы всегда можем избавиться от общности, редуцируя функцию более высокого порядка к функции более низкого порядка. Использование общности затрагивает лишь способы выражения функций, характеризуя их как элементарные или неэлементарные. И поскольку разветвлённая теория типов для Рассела базировалась именно на том, что наличие и отсутствие общности затрагивает различие в значении функции, то в отсутствие этого различия всякая необходимость в разветвлённой теории типов исчезает[1].

---

[1] Здесь нельзя не согласиться Г. Хохбергом: «Рассмотрим конечный случай, где мы имеем n атомарных функций $F_1, F_2, \ldots F_n$. Пусть ‘f^1’ будет переменной *первого порядка*, которые мы ограничиваем функционально истинностными соединениями атомарных функций (т.е. игнорируем усложнения, входящие в рассмотрение функций типа $(x)xR\hat{y}$). Тогда $(f^1)\ f^1 a$ эквивалентна, а для Рамсея, следовательно, идентична конъюнкции с 2^{2^n} конъюнктами. Но тогда функция второго порядка $(f^1)\ f^1\hat{x}$ на самом деле является функцией первого порядка, коньюнктивной функцией. В этой манере каждая функция второго порядка, по-видимому, является функцией первого порядка. Более того, та же самая процедура применяется для *редукции* функций любого подразумеваемого более

Развитие представленного подхода, очевидно, требует модификации понятий, используемых Расселом. Рамсей сохраняет различие функций на элементарные и неэлементарные. Так, функции вида $f(\hat{x}, \hat{y})$ и $f(\phi\hat{x}, y)$ являются элементарными, а функции вида $(x) . f(x, \hat{y})$ и $(\phi) . f(\phi\hat{x}, y)$ – нет, поскольку вторые, в отличие от первых, содержат выражения общности. Хотя следует учесть, что для Рамсея это различие затрагивает способы выражения, а не значение функций, как для Рассела. Сложнее дело обстоит с понятием предикативной функции. Напомним, что для Рассела предикативная функция – это функция, которая не содержит мнимых переменных более высокого порядка, чем её действительные аргументы. Так, $(x) . f(x, \hat{y})$ является предикативной функцией от y, а функция $(\phi) . f(\phi\hat{x}, y)$ – нет. Поскольку наличие или отсутствие общности для Рамсея характеризует лишь разные способы выражения, но не сами функции, расселовское понятие предикативной функции здесь, очевидно, не работает. В этой связи различие выражений не затрагивает смысл функций. Как указывает Рамсей:

> Предикативные и первопорядковые функции различаются тем, что они символизируют различными способами; но это различие не характеризует смысл пропозиции и, таким образом, не является существенным [81. P. 148].

И именно это понятие требует модификации. Рамсей считает, что вводимое Расселом различие между предикативными и непредикативными функциями связано с принятым им общим методом построения пропозициональных функций. Что здесь является важным? Под пропозициональными функциями от индивидов понимаются символы вида $f(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z} \ldots)$, где $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z} \ldots$ – индивидные переменные. С каждой пропозициональной функцией от индивидов соотне-

высокого порядка $n + 1$ к функциям более низкого порядка n. Следовательно, все функции являются функциями первого порядка. Таким образом, в разветвлённой теории типов нет никакого смысла. В сущности, в этом заключается точка зрения Рамсея. И он считает, что то же самое верно, если мы имеем $\aleph_0$ атомарных функций. Помимо проблемы, на которую мы указали относительно имплицитного использования квантификации, он должен также учитывать неперечислимые конъюнктивные и дизъюнктивные функции с “составляющими их” перечислимо бесконечными и неперечислимыми истинностными функциями. Тогда, допуская, что мы можем осмысленно говорить о таких “вещах”, нет необходимости мыслить в терминах функций более высокого порядка» [60. P. 265].

сено множество атомарных высказываний, получаемых из пропозициональной функции заменой индивидных переменных именами индивидов. Так, если $f(\hat{x})$ – одноместная функция от индивидов, то с ней соотнесены пропозиции ‘ $f(a)$’, ‘ $f(b)$’, ‘ $f(c)$’ и т.д., где ‘a’, ‘b’, ‘c’ – имена индивидов. Если имён для индивидов нет, мы можем указать на конъюнктивную или дизъюнктивную общность соотнесённых с функцией пропозиций с помощью новой пропозиции, использующей выражение общности, такой как ‘$(x) . f(x)$’ или ‘$(\exists x) . f(x)$’. Этот же подход можно распространить на функции от индивидов любой местности. Так, например, с двухместной функцией $f(\hat{x}, \hat{y})$ мы можем соотнести пропозиции вида ‘$f(a, b)$’, придав константное значение переменным $\hat{x}$ и $\hat{y}$, или пропозиции вида ‘$(x).f(x, a)$’, придав сначала константное значение переменной $\hat{y}$ и образовав одноместную функцию от индивидов $f(\hat{x}, a)$, а затем указав с помощью общности на совокупность соотнесённых с этой одноместной функцией пропозиций.

Казалось бы, подобный подход можно распространить и на функции от функций. Например, для одноместной функции от функций $f(\phi\hat{x})$ можно было бы задать общность пропозиций, указывая с помощью ‘$(x).f(\phi\hat{x})$’ и ‘$(\exists x). f(\phi x)$’ на их конъюнкцию и дизъюнкцию соответственно. Но, как считает Рамсей, подобный подход страдает от «плачевной двусмысленности». Дело в том, что область значения функции от индивидов образуют объективную общность пропозиций, что связано с объективностью области индивидов, тогда как область значения функций от функций не образует объективной общности, поскольку функции рассматриваются как символы и зависят от принятых способов построения. Эту двусмысленность можно попытаться устранить, уподобив функции от индивидов функциям от функций, говоря не о функциях от индивидов, а о функциях от имён индивидов, поскольку имена также являются символами. Но проблемы это не решает, так как общность имён всё равно определяется объективной областью индивидов, которые с ними соотнесены. Для функций же такой объективной общности, не зависящей от способов их построения, нет, на что, в частности, указывает то, что неограниченное использование функций от функций может приводить к парадоксам, что требует принятия определённых синтаксических ограничений на их построение, как поступает Рассел. Эти синтаксические ограничения выражаются в различении функций на порядки, даже если они относятся к одним и тем же аргументам, и введении особого понятия предикативной функции, чего не было, если бы функции понимались как нечто большее, чем символы определённого вида[1].

Подход к конструированию функций, принятый в *PM*, Рамсей называет субъективным, субъективным в том смысле, что он ориентирован на определённые виды грамматических конструкций. Однако, как было показано в начале параграфа, само по себе различие в грамматических конструкциях для различия самих функций роли не играет, поскольку использование редукции по методу Витгенштейна показывает, что различие в порядках функций затрагивает лишь способы выражения, но не их объективное значение. В противовес подходу *PM* Рамсей предлагает объективный метод задания общности функций, который был бы ориентирован не на то, как они построены, но на то, каково их объективное значение.

Можно сказать, что в этом отношении Рамсей оборачивает возможный способ решения указанной выше двусмысленности. Дело не в том, чтобы уподобить функции от индивидов функциям от функций, рассматривая функции от имён индивидов, но в том, чтобы функциям от имён индивидов уподобить функции от функций:

> Знаки, которые могут быть подставлены как аргументы в ‘$\phi \hat{x}$’, функции от индивидов, определяются их значениями; они должны быть именами индивидов. Сходным образом, я предлагаю опреде-

[1] Относительно необходимости подобного разветвления типов на порядки у Рассела весьма резко отзывается Е. Кёллер: «Один из худших аспектов оригинальной теории типов Рассела включал ‘разветвлённые типы’ или порядки, используемые для решения семантических или интенсиональных антиномий, типа парадокса Ришара. Рамсей просто указал, что сведение математики к логике не требует каких-либо интенсиональных принципов, поэтому от разветвления можно избавиться. Ретроспективно мы можем сказать, что Рассел, в своём рвении приспособить логику для всех целей на все сезоны, просто пытался сделать слишком много вещей одновременно. Пытаясь осуществить мечту Лейбница о *characteristica universalis*, создавая универсальный язык, Рассел втиснул в свой формальный аппарат особый механизм, чтобы иметь дело с некоторыми семантическими проблемами, которые сегодня мы много лучше трактуем в семантических метатеориях. Вместо этого он лучше бы проигнорировал некоторые из своих амбиций и в лучших британских традициях (разделяй и властвуй!) сконцентрировался на более важной проблеме, проблеме сведения математики к более упрощённой логике» [62. P.92]. По нашему мнению, резкий негатив должен быть смягчён, поскольку Рамсей также создаёт теорию «на все сезоны» и с теми же следствиями, но на других основаниях.

лять символы, которые могут быть подставлены как аргументы в '$f(\phi\hat{x})$', не по способу их конструирования, но по их значениям» [17. С. 58].

Другими словами, Рамсей предлагает задавать общность функций не с точки зрения того, как их можно построить, но с точки зрения того, какое значение мы пытаемся выразить, быть может, и используя разные способы выражения. Используя современную терминологию, можно сказать, что Рамсей отказывается от синтаксического подхода к заданию функций в пользу семантического. Сделать это достаточно трудно, поскольку в отличие от имён, которые обозначают индивиды, т.е. единичные объекты, с которыми имена соотносятся однозначным образом, значение функций более сложно, поскольку может быть поставлено в зависимость от возможных видов пропозиций, которые могут быть построены с их помощью. Как показывает метод редукции, представленный выше, эти пропозиции могут быть выражены как элементарно, так и не элементарно, как используя предикативные функции в смысле Рассела, так и нет. Здесь следует учесть также и то, что могут существовать пропозиции, которые мы не можем выразить за конечное число шагов. Дело в том, чтобы все пропозиции представить с точки зрения единого значения, допускающего разные способы выражения:

> Мой метод состоит в том, чтобы рассмотреть, как мы можем их сконструировать и определить с помощью описания их смысла или сути; и, поступая так, мы могли бы быть способны включить в это множество пропозиции, для которых у нас нет способа конструирования, точно так же, как мы включаем в область значений ϕx пропозиции, которые не можем выразить из-за недостатка имён для рассматриваемых индивидов [17. С. 58].

Такой метод задания функций Рамсей называет объективным и противопоставляет его методу, принятому в *PM*. В конечном счёте, учитывая представленный метод редукции, для Рамсея проблема сводится к тому, чтобы «в качестве значений $f(\phi\hat{x})$ зафиксировать некоторое определённое множество пропозиций так, чтобы мы могли утверждать их логическое произведение или сумму» [17. С. 58]. В решении этой задачи Рамсей отталкивается от понятия атомарной функции от индивидов, которые понимаются им как пропозициональные функции, полученные из атомарных высказываний заменой имён индивидов на индивидные переменные. Затем на атомарные функции от индивидов распространяется идея истинностных функций. Это осуществляется следующим образом. Допустим, у нас есть атомарные функции $\phi_1(x)$ и $\phi_2(x)$. Из них можно образовать конъюнкцию $\phi_1(x) \,.\, \phi_2(x)$ и определить её как $\psi(x)$, которая для каждого имени индивида 'a' задаёт пропозицию '$\psi(a)$', являющуюся конъюнкцией '$\phi_1(a) \,.\, \phi_2(a)$'. Этот подход можно распространить на истинностные функции любого вида, построенные с помощью различных логических союзов, что, впрочем, не существенно ввиду взаимоопределимости последних. Эти функции могут включать не только атомарные функции, но и другие пропозиции. Пусть, например, $\psi(x)$ определена как $(\phi_1(x) \vee p) \,.\, \phi_2(x)$. Интересно здесь то, что эта же функция может быть определена как $\sim(\sim\phi_1(x) \vee \sim p) \,.\, \phi_2(x)$, так и многими другими способами, поскольку первое и второе определение имеют одинаковые условия истинности. Таким образом, поскольку с точки зрения подхода Витгенштейна, которому следует Рамсей, функции, имеющие одинаковые условия истинности не различаются, способ построения $\psi(x)$ никакой роли не играет, учитывается только её объективное значение.

Это важно в связи с тем, что число атомарных функций, на которые распространяется идея истинностных функций, может быть не только конечным, но и бесконечным. В этом случае, когда за конечное число шагов истинностную функцию выразить невозможно, используются выражения общности и истинностная функция становится неэлементарной в смысле Рассела. Но ввиду того, что элементарность и неэлементарность затрагивает для Рамсея лишь способ выражения, поскольку неэлементарные функции в принципе (хотя и не актуально) редуцируемы к элементарным, на объективное значение истинностных функций это влияния не оказывает.

Отталкиваясь от подобных соображений, можно ввести новое понятие предикативной функции, которое Рамсей определяет так:

> *Предикативная функция* от индивидов – это функция, которая является любой истинностной функцией, аргументами которой конечными или бесконечными по числу, являются все или атомарные функции от индивидов, или пропозиции [17. С. 60].

Аналогичное определение нетрудно задать и для функций от функций, следует лишь учитывать требования простой теории типов. Заметим, что такое понятие предикативной функции неизмеримо шире аналогичного понятия из *PM*. В частности, все предикативные функции в смысле Рассела оказываются предикативными в смысле Рамсея. Для элементарных функций это – очевидно. Для неэлементарных функций от индивидов это следует из метода редукции, поскольку, например, функция $(y)f(x,y)$ представляет собой лишь конъюнкцию (хотя, возможно, бесконечную) функций вида $f(x,a)$, $f(x,b)$ … Более того, в число предикативных включаются не только функции, которые могут быть построены разными способами, но и функции, для конструирования которых средств *PM* не хватает. В данном случае главное в том, что учитывается их объективное значение, для выражения которого не хватало средств у конструирующего их логика, но которое должно быть учтено объективностью логики как науки[1].

Но как обстоит дело с непредикативными функциями в смысле Рассела? С точки зрения Рамсея, непредикативные функции *PM*, вроде $(\phi) . f(\phi\hat{z}, x)$, также оказываются предикативными. Действительно, как показано выше при описания метода редукции, любая такая функция может быть представлена как конъюнкция атомарных функций, переменных для ϕ, но постоянных для x, в виде $(\phi_1 x . \phi_2 x . \phi_3 x . \ldots)$. Если обратиться к содержательному примеру, то функция ‘x имеет все свойства философа’ при соответствующем понимании свойств философа представима как логическое произведение (возможно, бесконечное) вида ‘(x – интеллектуально честен) . (x – логичен) . …’. Поэтому

> ясно, что посредством обобщения, независимо от типа мнимых переменных, мы никогда не сможем создать непредикативную функцию, ибо обобщение является истинностной функцией своих примеров и, если примеры предикативны, предикативным является и оно. Таким образом, все функции индивидов, встречающиеся в *Principia*, являются предикативными в нашем смысле и включены в нашу переменную ϕ, так что всякая необходимость в аксиоме сводимости исчезает [17. С. 62].

Здесь, правда, возникает вопрос относительно самой функции $Fx = {}_{\mathrm{def}} (\phi) . f(\phi\hat{z}, x)$. Может ли она выступать значением мнимой пере-

[1] Как утверждает У. Майер, «…в простой теории типов Рамсея бесконечность встречается не как *потенциальная* бесконечность индивидуальных объектов типа натуральных чисел, но как *актуальная* бесконечность (атомарных) высказываний, которые не ‘конструируются’ нами, но которые существуют *per se*, безотносительно того, можем ли мы их выразить или же нет» [66. P. 179].

менной ϕ в $(\phi) \,.\, f(\phi\hat{z}, x)$? Ведь именно этот случай, по мнению Рассела, приводит к порочному кругу и требует ограничений на построение функций. Утвердительно отвечая на поставленный вопрос, Рамсей тем не менее считает, что в этом случае нет ничего порочного. Общность, присутствующая в Fx, характеризует лишь способ выражения, но не затрагивает значения самой функции, которая может быть представлена соответствующей конъюнкцией, и даже если среди конъюнктов последней встречается сама Fx, т.е. конъюнкция имеет вид $(\phi_1 x \,.\, \phi_2 x \,.\, \phi_3 x \,.\, \ldots \,.\, Fx)$, в этом нет ничего логически несообразного, поскольку здесь Fx также должна рассматриваться как конъюнкция, т.е. выражение принимает вид $(\phi_1 x \,.\, \phi_2 x \,.\, \phi_3 x. \,\ldots\, . (\phi_1 x \,.\, \phi_2 x \,.\, \phi_3 x \,.\, \ldots))$. Соответственно, когда мы записываем пропозицию $Fa = {=_{\mathrm{def}}} (\phi) \,.\, f(\phi\hat{z}, a)$, используя неэлементарные способы выражения ввиду недостаточности логических средств, мы должны трактовать её как конъюнкцию вида $(\phi_1 a \,.\, \phi_2 a \,.\, \phi_3 a. \,\ldots\, . (\phi_1 a \,.\, \phi_2 a \,.\, \phi_3 a \,.\, \ldots))$. Как утверждает Рамсей,

> пропозиция Fa – это, конечно, логическое произведение пропозиций $f(\phi\hat{z}, a)$, но выразить её подобным образом (единственно возможным для нас) – значит просто описать её определённым способом, ссылаясь на общность, членом которой может быть она сама, так же как мы можем указать на человека как на самого высокого в группе, идентифицируя, таким образом, его посредством совокупности, членом которой является он сам, не впадая в порочный круг [17. С. 62].

Использование неэлементарной функции Fx касается лишь избранного способа выражения и не затрагивает объективного значения пропозиции[1].

---

[1] Анализируя данный пример, М. Даммит утверждает, что отрицание принципа порочного круга у Рамсея приводит к реалистскому взгляду на природу математических объектов. Как считает М. Даммит, идентификация объекта посредством совокупности, к которой принадлежит он сам, возможна только потому, что эта совокупность представляется как заданная объективно и сама решает вопрос о том, выполняют ли определённую функцию её объекты. Круг здесь не является порочным потому, что представление о всей совокупности уже заложено в основу её формирования, когда задаётся понятие, объёмом которого она является. «Выбор подходящего понятия – это всё, что нужно нам для того, чтобы полностью определить область квантификации. Нам не нужно, вдобавок к выбору понятия, которое фиксирует условия членства в общности, устанавливать, какие подпадающие под это понятие объекты существуют, или как много их существует; внешняя реальность делает это за нас» [50. P.30]. Но, утверждает Даммит, относительно математических объектов подобный подход проходит не всегда.

Но случай с ‘$\phi_1 a . \phi_2 a . \phi_3 a . \ldots . (\phi_1 a . \phi_2 a . \phi_3 a . \ldots)$’ вполне аналогичен случаю с ‘$p . q . (p . q)$’. Из свойств конъюнкции следует, что условия истинности ‘$p . q . (p . q)$’ совпадают с условиями истинности ‘$p . q$’, а значит, поскольку пропозиции с одинаковыми условиями истинности отождествляются, ‘$p . q$’ может рассматриваться как логическое произведение элементов множества ‘p’, ‘q’, ‘$p . q$’, членом которого является само ‘$p . q$’. В этом явно нет ничего порочного. Поэтому нет ничего порочного и в том, что во множество, логическое произведение элементов которого рассматривается как эквивалент ‘Fa’, включено само ‘Fa’. Различие заключается лишь в том, что ввиду нашей неспособности записывать конъюнкции бесконечной длины, что логически случайно, мы не можем выразить последний случай элементарно, как это может быть сделано в случае с ‘$p . q$’, но должны прибегать к выражениям общности[1].

[1] На особенности подхода Рамсея в рамках общей трактовки кванторов Витгенштейном обращает внимание Хохберг: «Если, как предполагает Рамсей, ‘$(\exists f) f\hat{x}$’ и ‘$(f) f\hat{x}$’ представляют бесконечную дизъюнктивную и конъюнктивную функцию соответственно, одна из конституент которых сама является бесконечной функцией, то возникает проблема. Эта проблема должна иметь дело с понятием бесконечных дизъюнктивных и конъюнктивных функций, узловым пунктом предположительно витгенштейнианским объяснением кванторов. Мы вернёмся к этому вопросу позже. Ибо, даже забыв какие-то проблемы с таким способом объяснения кванторов, всё ещё остаётся вопрос, относящийся к утверждению, что такие функции могут содержать самих себя как “конституенты”. Казалось бы, что в случае бесконечной функции, в смысле Рамсея, имеет место бесконечный регресс, включённый в попытку специфицировать функцию. Центральный вопрос в том, насколько оправдана аналогия Рамсея между случаем функций типа $(f) f\hat{x}$ и функциями типа $p \,\&\, q \,\&\, (p \,\&\, q)$. Когда Рамсей отождествляет $p \,\&\, q$ на основании логической эквивалентности с $p \,\&\, q \,\&\, (p \,\&\, q)$, ясно, что мы не специфицируем, что функция $p \,\&\, q$ ссылается на $p \,\&\, q \,\&\, (p \,\&\, q)$ и, следовательно, на *саму себя*. Мы не определяем, как это может показаться, $p \,\&\, q \,\&\, (p \,\&\, q)$ ссылкой на $p \,\&\, q$ и, следовательно, “на саму себя”. Рассматриваемая функция, $p \,\&\, q$, определяется заданием истинностной таблицей для & и областью переменных. Но если мы берём $(f) f\hat{x}$ как бесконечную конъюнктивную функцию, кажется, как если бы мы определили её *как конъюнкцию членов, одним из которых является* $(f) f\hat{x}$. Казалось бы, что здесь явно содержится круг. Проблема не в том, способны ли мы записать бесконечно длинное выражение, но в том, определима ли явно функция ссылкой на множество аргументов, одним из которых является сама эта функция. Таким образом, на самом деле вопрос не о выражении для бесконечно длинной функции, но о функции “определяемой” посредством “бесконечного списка”, в который она по предположению включена. Если это – то, что предполагает Рамсей, он попадает в ‘порочный круг’. Но, вероятно, это не то, что делает Рамсей. Скорее, он, без сомнения, утверждает, что при заданной бесконечной области атомарных функций $F_1, F_2, \ldots F_n$ и бесконечной конъюнктивной функции Φ, составленной из всех них, мы имеем бесконечную конъюнктивную функцию Ψ, составленную из первоначальных F_i и Φ. Тогда Ψ логически эквивалентна,

Проиллюстрируем вышесказанное содержательным примером, к которому уже прибегали. Возьмём высказывание «Сократ имеет все свойства философа», обладающее всеми структурными особенностями рассмотренного выше ‘Fa’. Согласно Рамсею, это высказывание эквивалентно конъюнкции высказываний, имеющих вид «Сократ интеллектуально честен», «Сократ логичен» и т.д., из возможно бесконечного множества, в которое включено и само высказывание «Сократ имеет все свойства философа». Таким образом, мы получаем высказывание «Сократ интеллектуально честен, логичен, …, имеет все свойства философа». Но если ‘все свойства философа’ опять заменить конъюнкцией, то получим «Сократ интеллектуально честен, логичен, …, интеллектуально честен, логичен …», в котором лишь дважды утверждается одно и то же. Различие исходного и заключительного высказываний в данном примере затрагивает лишь способ выражения, поскольку в первом случае используется неэлементарная, а во втором элементарная функции, но роли это не играет, поскольку оба высказывания имеют одинаковые условия истинности.

а для Рамсея, следовательно, идентична с Ф, так как p & q & (p & q) логически эквивалентна и, следовательно, для Рамсея идентична с p & q. Рамсей использует этот пункт, предполагая, что здесь нет проблем с Ψ. Мы можем видеть, как он думает об этом. Поскольку p & q есть логическое произведение p и q и p & q и, следовательно, есть p & q & (p & q), конъюнкция может содержать саму себя. Итак, если (f) $f\alpha$ на самом деле является конъюнкцией, она также может содержать саму себя. Более того, когда мы определяем функцию, представленную посредством ‘&’ с точки зрения истинностных таблиц, становится понятным, что знаки типа ‘p’ и ‘q’ могут быть заменены любыми пропозициональными знаками, включая конъюнктивные выражения типа ‘p & q’ и ‘p & q & (p & q)’. Таким образом мы опознаём область, над которой пробегает функция p & q, и эта область включает коньюнктивные составляющие. Тогда можно посчитать, что мы определяем функцию p & q с точки зрения её применения к области, которая включает “конъюнкции” и, следовательно, как приложимую к области, содержащей “саму себя”. Мы без проблем определяем конъюнктивную истинностную функцию, задавая как истинностную таблицу, так и область её применения, и отождествление p & q с p & q & (p & q) не препятствует сделать это. Вопрос в том, допускается ли для функции быть одной из функций, на которые распространяется действие квантора и *к тому же* логическим произведением всех функций, находящихся в области действия квантора. Дело обстоит так, как если бы мы пытались найти определение функции экстенсионально, предоставляя бесконечный список, не испытывая каких-либо проблем с “бесконечным списком”. Но Рамсей рассматривает эту функцию как логическое произведение *всех* функционально-истинностных составляющих изначального списка атомарных функций. Рассматривать саму функцию как одну из составляющих не более проблематично, чем рассматривать все истинностные функции p и q, включая функцию, которая эквивалентна конъюнкции всех функций. Определяя функцию так, мы не впадаем в порочный круг. В этом Рамсей прав» [60. P. 262].

Заметим, что подобный подход распространим не только на конъюнкцию атомарных высказываний. В принципе, какой бы ни была функция, свести её к функциям истинности атомарных пропозиций есть дело логической техники. При соответствующем способе записи для всех пропозиций, образованных с помощью операций истинности над атомарными высказываниями, результат которых имеет одинаковые условия истинности, можно ввести, что следует из подхода Витгенштейна, единую запись. Если, например, взять функцию истинности, представленную выше табл. 2, то ей будет соответствовать множество различных способов выражения, принятых в *PM*. Это будет не только '$p \vee \sim q$', но и '$\sim(\sim p \,.\, q)$', '$\sim (\sim p \,.\, (\sim p \,.\, q))$', '$\sim(\sim p \,.\, (q \,.\, q))$' и многих, многих других. Более того, ту же самую функцию истинности будет представлять и логическое произведение всех этих способов выражения, а именно, '$(\sim(\sim p \,.\, q)) \,.\, (\sim (\sim p \,.\, (\sim p \,.\, q))) \,.\, (\sim(\sim p \,.\, (q \,.\, q))) \ldots \,.\, (p \vee \sim q)$', которое включает само '$p \vee \sim q$', поскольку, что следует из условий истинности логического произведения, данная запись будет выражать те же самые условия истинности, что и каждый из конъюнктов. В этом случае, при принятых способах выражения в *PM,* можно сказать, что '$p \vee \sim q$' является логическим произведением множества пропозиций, членом которого является оно само, и именно его, например, вполне можно было бы рассматривать как, если и не единственным, то наиболее адекватным выражением истинностной функции из табл. 2. Здесь, конечно, необходимо различать способ выражения, в качестве которого мы можем избрать '$p \vee \sim q$', и объективное значение, остающееся одним и тем же при любых способах записи.

Подобная процедура, с точки зрения Рамсея, должна относиться и к тем функциям, которые мы не можем выразить элементарно ввиду недостаточности логических средств. Опять таки, роль должны играть не ресурсы конечной записи, а представление о принципиальной возможности записи как таковой, пусть она даже будет бесконечной и не соответствующей представлениям о человеческих способностях:

> Если бы мы обладали бесконечными ресурсами и могли выразить все атомарные функции типа $\psi_1 x$ и $\psi_2 x$, то мы могли бы образовать все пропозиции ϕa, т.е. все истинностные функции $\psi_1 a$, $\psi_2 a$ и т.д., и среди них была бы та, которая является логическим произведением их всех, включая саму себя, так же как $p \,.\, q$ является произведением p, q, $p \vee q$, $p \,.\, q$. Эту пропозицию, которую мы не можем

выразить непосредственно, т.е. элементарно, мы выражаем опосредованно, как логическое произведение их всех, записывая ‘$(\phi) . \phi a$’. Это, конечно, круговой процесс, но в нём явно нет ничего порочного [17. С. 63].

Здесь, как и в случае конечной записи, важно лишь, чтобы условия истинности, соответствующие функции, оставались теми же самыми.

2.4. Теория типов Рамсея[1]

Преимущество своего определения предикативной функции в сравнении с определением Рассела Рамсей видит в следующем:

> В *Principia* область ϕ – это область функций, которые могут быть выражены элементарно, а поскольку $(\phi) . f(\phi ! \hat{z}, x)$ так выразить нельзя, она не может быть значением $\phi!$; но я определяю значения ϕ не по тому, как они могут быть выражены, но по тому, какой разновидностью смыслов обладают их значения или, скорее, по тому, какие факты, утверждаемые их значениями, относятся к их аргументам. Таким образом, я включаю функции, не говоря уже об элементарных, которые даже не могут быть выражены нами вообще, кроме как посредством бесконечной символической системы. И любая функция, образованная посредством обобщения, является действительно предикативной, и более нет какой-то необходимости в аксиоме сводимости [17. С. 63].

Итак, аксиома сводимости отбрасывается. В ней больше нет необходимости, поскольку понятие предикативной функции в смысле Рамсея охватывает все функции, рассматриваемые в *PM*. Но остаётся проблема. Аксиома сводимости использовалась у Рассела как способ сведения непредикативных функций к предикативным. Если же теперь оказывается, что, согласно методу Витгенштейна в интерпретации Рамсея, все функции являются предикативными, не означает ли это возрождение парадоксов, для преодоления которых и была изобретена разветвлённая теория типов?

Дело, собственно, в следующем. Рассел создал простую теорию типов. И эта теория решала ряд парадоксов, имеющих теоретико-множественный характер. Разветвлённая теория типов предназнача-

---

[1] В английском языке связь разветвлённой теории типов и теории типов Рамсея усиливается сходством названий: *ramified* – разветвлённая; *ramseyfied* – рамсифицированная.

лась для решения парадоксов, выходящих за эти рамки. Аксиома сводимости демонстрировала, что в пределах собственно математического рассуждения можно ограничиться простой теорией типов. Но если теперь эта аксиома отбрасывается, не возродятся ли вновь парадоксы? Действительно, аксиома сводимости постулировала, что функцию порядка $n+1$ всегда можно выразить функцией порядка n, а значит, можно избежать недоразумений, связанных с принципом порочного круга. Но если теперь, в интерпретации Рамсея, любую функцию можно рассматривать как относящуюся к порядку n, не прибегая к аксиоме сводимости, не означает ли это, что мы опять придём к парадоксам?

На первый взгляд ответ кажется утвердительным. Действительно, возьмём рассмотренный выше парадокс Грелинга. В рамках разветвлённой теории типов решение данного парадокса основывалось на том, что функция ‘x есть гетерологическое’ или символически ‘$(\exists\phi) : xR(\phi\hat{z}) . \sim\phi x$’ рассматривалась как непредикативная в смысле Рассела, если значения присутствующей в ней мнимой переменной не ограничивались порядком ниже самой этой функции. Если это условие не выполняется, то выражение ‘$(\exists\phi) : xR(\phi\hat{z}) . \sim\phi x$’ рассматривается как бессмысленное, как некорректное синтаксическое образование. Но изменение понятия предикативной функции у Рамсея приводит к тому, что функция ‘$(\exists\phi) : xR(\phi\hat{z}) . \sim\phi x$’ является предикативной без этого ограничивающего условия, т.е. сама эта функция может быть значением мнимой переменной ϕ, и, казалось бы, парадокс возрождается.

Однако не всё так просто. Рамсей даёт решение эпистемологических (или семантических) парадоксов на принципиально ином базисе, создавая новую теорию типов, основанную на другом понимании различения функций на порядки. У Рассела различие функций на порядки касалось способа их синтаксического построения. Но, как показал Рамсей, синтаксическая сторона дела не относится к существу проблемы, если мы обращаемся к объективному значению функций. Даже если это и требует бесконечных ресурсов, то это касается ограниченности логика, но не объективности логики как науки.

Поскольку значение функций объективно, то не имеет смысла учитывать синтаксический способ построения их выражений, так как он не относиться к делу. Учитывая ‘эпистемический’ или ‘лингвистический’ характер парадоксов, для которых была нужна разветвлённая теория типов, скорее резонно предположить, что дело здесь в том, как функционируют используемые нами выражения, обозначая своё значение. Резонно предположить, что парадоксы возникают не из-за конструктивных особенностей построения функций, а из-за некритически усвоенного понятия значения выражений, с помощью которых строятся эти функции, что и делает Рамсей, переходя, таким образом, из синтаксической плоскости рассмотрения в семантическую[1]. Как утверждает Рамсей,

> из противоречий явно вытекает то, что мы не можем получить для пропозициональных функций всеохватное отношение значения. Какое бы отношение мы ни брали, всё ещё есть способ конструирования символа, который обозначает таким способом, который не включён в наше отношение. Значения значения образуют логически неправильную совокупность [17, С. 68].

Выражение «неправильная логическая совокупность», очевидно, отличается здесь от соответствующего выражения в рамках *PM*. Нетрудно заметить, что речь здесь, хотя она и идёт о функциональных выражениях, затрагивает не тот способ, которым конструируются выражения функций, но то, каким образом элементы этого выражения относятся к тому, что они обозначают. Выражение “логически неправильная совокупность” относится здесь не к тому, что мы пытаемся соотнести с определённым образом построенной функцией, но к тому, что соотносится со значением символического выражения этой функции. Стало быть, неправильную совокупность следует искать не в области объективного значения функции, а в области неправильно понятого значения её символического выражения.

Рамсей рассуждает следующим образом. Возьмём, например, простое высказывание ‘aRb’. Здесь ‘a’ и ‘b’ являются именами индивидов, а ‘R’ – именем отношения. Тогда имена ‘a’, ‘b’ и ‘R’ непосредственным образом соотнесены с объектами a, b и R. Но предположим теперь, что по определению мы принимаем $\phi x =_{\mathrm{def}} aRx$. Тогда

[1] Сошлёмся на мнение Н.-Э. Салин: «Парадоксы, указанного выше прототипа, по-видимому, возникают потому, что некоторые функции не ясно определены. Авторы *Principia Matematica* решают проблему ясным и недвусмысленным установлением того, как более общие функции могут быть сконструированы из множества элементарных функций. Рамсей оборачивает проблему. Проблема не в том, каким образом конструируются функции, но в вопросе о значении. Определённое преимущество метода Рамсея в том, что мы не запрещаем функции, которые не конструируемы согласно правилам *Principia Matematica*. Можно сказать, что Уайтхед и Рассел пытались избежать семантических парадоксов через изменение синтаксиса. Рамсей, однако, осознал, что семантическая проблема требует семантического решения» [84. P. 173].

‘ϕ’ относится к aR совершенно иным, более сложным способом, поскольку необходимо учитывать не непосредственное отношение этого символа к единому объекту, но трёхчленное отношение между ‘ϕ’, a и R. Эти особенности значения нужно учитывать относительно любой функции, выраженной элементарно. Например, если по определению мы принимаем ‘$\phi!x =_{\text{def}} aRx \,.\, bRx \,.\, cRx$ ...’, то необходимо учитывать все те сложные отношения, в которых символ ‘ϕ’ находится с a, b, c … и R.

Однако, как указывалось выше, с точки зрения Рамсея, элементарность характеризует не объективное значение функции, но способ её выражения. То, что мы выразили элементарно, может быть выражено не элементарно. Так, левая часть определения ‘$\phi!x =_{\text{def}} aRx \,.\, bRx \,.\, cRx$ ...’ с точки зрения объективного значения функции будет эквивалентна неэлементарному выражению ‘$(y) \,.\, yRx$’, если переменная y пробегает по объектам a, b, c … . Но можно ли их заменить в данном определении друг на друга. Рамсей утверждает, что нет. Мы можем ввести по определению, что ‘$\phi_1 x =_{\text{def}} (y) \,.\, yRx$’. Но символы ‘$\phi!$’ и ‘$\phi_1$’ обозначают совершенно различными способами, поскольку ‘$\phi!$’ соотносится с объектами a, b, c …, являясь сокращением для выражения, содержащего соответствующие имена ‘a’, ‘b’, ‘c’ …, тогда как ‘ϕ_1’ вообще не соотносится с этими объектами, но только с мнимой переменной, которая по ним пробегает. Поэтому ‘ϕ_1’ обозначает иным, более сложным способом, чем ‘$\phi!$’.

Как уже говорилось, способ выражения функций, элементарный или неэлементарный, не является характеристикой самой функции. То же самое относится и к способу обозначения. Он не характеризует саму функцию, но относится лишь к тому, как приобретают значение способы выражения функции. Поэтому ‘$\phi!x$’ и ‘$\phi_1 \hat{x}$’ могут выражать одну и ту же функцию, но подразумевать своё значение совершенно различными способами. Те же самые соображения касаются символа ‘ϕ_2’, включающего мнимую функциональную переменную от индивидов, символа ‘ϕ_3’, включающего мнимую функциональную переменную от функций индивидов, и т.д. Как говорит Рамсей,

> различия ‘$\phi!$’-ок, ‘ϕ_1’-ок и ‘ϕ_2’-ок применяется к символам и к тому, как они обозначают, но не к тому, что они обозначают. Поэтому я всегда (в этом разделе) заключал ‘$\phi!$’, ‘ϕ_1’ и ‘ϕ_2’ в кавычки [17. С. 67].

Именно это имеет в виду Рамсей, когда говорит, что невозможно получить всеохватное отношение обозначения, а попытка оперировать подобным понятием порождает неправильную логическую совокупность, приводящую к противоречиям. Можно, конечно, возразить, что возможно попытаться сформировать такое понятие значения символов, которое включало бы все различные '$\phi!$'-ки, 'ϕ_1'-ки, 'ϕ_2'-ки и т.д., но всё равно, утверждает Рамсей, само оно для любого заданного 'ϕ_n' относилось бы к уровню 'ϕ_{n+1}' и всеохватного понятия значения мы бы не получили.

Все эти соображения приводят Рамсея к построению собственной теории типов, в существенных моментах отличающейся от разветвлённой теории типов Рассела. Самое главное в этой теории то, что типы и порядки разводятся по разным рубрикам. Типы характеризуют объективное значение функции, тогда как порядки – только её символическое выражение[1]. Понятие типа у Рамсея соответствует

[1] Выше указывалось, что подход Рамсея к разветвлённой теории типов содержит два момента. Во-первых, негативный, связанный с отрицанием того понимания различения функций на порядки, которое было у Рассела. Во-вторых, позитивный, связанный с разработкой нового основания для решения семантических парадоксов. Достойно сожаления то, что в рамках теоретико-типовых подходов к теории множеств в основном был усвоен только первый момент, тогда как второй не получил должного развития. Возможно, это связано с тем, что семантические проблемы были выведены за рамки оснований математики, чему, видимо, немало способствовали и сами эти идеи Рамсея. Как пишет П. Саливэн: «Предложенное Рамсеем решение проблемы, поставленной сводимостью, частично было усвоено, а частично – нет. В *Principia* пропозициональные функции стратифицируются двумя способами: во-первых, по типу 'действительных' (свободных) переменных, которые они содержат (в зависимости от того, являются ли они функциями от индивидов, функциями от функций индивидов … и т.д.); во-вторых, по типу любых 'мнимых' переменных, которые они содержат (функции от индивидов могут быть атомарными или включать квантификацию над индивидами или над функциями индивидов … и т.д.). Первая стратификация на *уровни* нужна, чтобы решить логико-математические парадоксы наибольшего ординала, множества всех множеств и парадокса Рассела; вторая стратификация на *порядки* позволяет ускользнуть от тех парадоксов, которые, так или иначе, обращаются к психологическим или семантическим понятиям: парадоксу Лжеца, гетерологическому парадоксу Вейля, парадоксу наименьшего неопределимого ординала и т.п. Эффект сводимости должен снять вторую стратификацию. Здесь определённые наблюдения Рамсея касались того, что можно было бы сделать без воспроизведения парадоксов в самой логической или математической системе, если не затрагивать парадоксов первого случая. Многое стало стандартом: различие между логическими и семантическими парадоксами; упрощение теории типов, которое вытекает из того, что намереваются иметь дело только с парадоксами первого рода, и, вследствие этого, возможный отказ от сводимости. Но в *Основаниях математики* Рамсей пытается сделать больше. Он не отбрасывает семантические парадоксы как не относящиеся к делу (что позднее было сделано Тарским), но предлагает для них решение, что преобразует вторую стратификацию на порядки. Это решение покоится на противопоставлении пропозициональных функций и неких

тому пониманию, которое фигурировало в простой теории типов. Он сохраняет фундаментальную иерархию индивидов, функций от индивидов, функций от функций индивидов и т.д., относя первые к типу 0, вторые к типу 1, третьи к типу 2 и т.д., но изменяет понимание стратификации на порядки.

Высказывания, не содержащие мнимые переменные (элементарные высказывания), Рамсей относит к порядку 0, высказывания, содержащие мнимые индивидные переменные, – к порядку 1, высказывания, содержащие мнимые переменные функций от индивидов, – к порядку 2 и т.д. В общем случае высказывание относится к порядку n, если оно содержит мнимые переменные, относящиеся к типу n–1. Из иерархии высказываний выводится стратификация функций, которая относится не к иерархии типов, а к порядку значения их выражения. Функции, не содержащие мнимых переменных, относятся к порядку 0, функции, содержащие мнимые индивидные переменные, – к порядку 1, функции, содержащие мнимые переменные функций от индивидов, – к порядку 2 и т.д.

В целом эта иерархия напоминает иерархию разветвлённой теории типов. Но следует учесть, что смысл этой стратификации совершенно иной. Для Рассела и типы, и порядки являются действительными характеристиками функций, тогда как для Рамсея типы и порядки имеют сущностное различие:

> Тип функции является действительной её характеристикой, зависящей от аргументов, которые она может принимать; но порядок

символов, посредством которых они могут быть выражены [87. P. 109–110]. Можно вполне согласиться и с Ч. Чихарой, который, характеризуя причины игнорирования позитивных предложений, содержащихся в теории Рамсея, указывает: «Я полагаю, что детали предлагаемой Рамсеем теории типов по большей части игнорировались, прежде всего, по следующим причинам: Во-первых, витгенштейнианские (*Трактат*) основания теории Рамсея рассматривались в значительной степени, особенно философами, как подорванные последующим критицизмом в духе позднего Витгенштейна. Во-вторых, вопрос об истинности или приемлемости логицизма стал мёртвой проблемой некоторое время спустя для большинства логиков и философов математики и, как результат, пропал интерес к продолжению предпринятых Рамсеем поисков ‘тавтологичных’ аксиом логики, которые подходили бы для выведения классической математики. В-третьих, большинство главенствующих фигур в области оснований математики в течение соответствующего периода были либо математиками, либо философами, овладевшими сугубо математической точкой зрения. Поэтому царила тенденция игнорировать те черты работы по основаниям, которые не были математически значимыми. Поскольку главные теоретико-множественные улучшения, предложенные Рамсеем, мыслились включёнными в стандартную простую теорию типов, не удивительно, что к деталям этой теории выказывалось мало интереса» [49. P. 22].

> пропозиции или функции является не действительной характеристикой, но тем, что Пеано называл псевдофункцией. Порядок функции напоминает числитель дроби. Так же как из ‘$x = y$’ мы не можем вывести, что числитель x равен числителю y, так и из того факта, что ‘p’ и ‘q’ являются примерами одной и той же пропозиции, мы не можем вывести, что порядок ‘p’ равен порядку ‘q’ … Порядок есть лишь характеристика отдельного символа, который является примером пропозиции или функции [17. С. 69].

Стратификация на порядки для объективного значения функции имеет фиктивный характер и отражает только способы, которые использует выражающий это объективное значение логик. Будучи ограниченным конечными ресурсами, он прибегает к порядкам там, где в силу сложившихся обстоятельств невозможно обойтись элементарными выражениями функций.

Так же как и разветвлённая теория типов, стратификация, предложенная Рамсеем, позволяет разрешить парадоксы группы B, но на другом основании. Вернёмся, например, к парадоксу Грелинга. Функция $Fx =_{Def} (\exists\phi) : xR(\phi\hat{z}) \,.\, \sim\phi x$, с точки зрения того, как Рамсей определяет предикативную функцию, представляется противоречивой. Однако это не так. Связано это с тем, каким образом приобретают значение символы ‘ϕ’ и ‘R’. Допустим, что значение символа ‘ϕ’ ограничено элементарными функциями, тогда ‘R’ выражает отношение обозначения между ‘$\phi!$’ и $\phi!\hat{x}$. Но сама ‘Fx’ не является элементарной, поскольку в её структуру входит мнимая переменная функции от индивидов и, стало быть, относится ко второму порядку, т.е. представляет собой ‘ϕ_2’. А значит, ‘F’ относится к своему значению совершенно иначе, чем ‘R’ к своему. Поэтому, в данном случае Fx не может подразумеваться в качестве возможного значения ‘ϕ’ и, тем самым, парадокс Грелинга устраняется. Здесь важно отметить различие в решениях, предлагаемых в рамках разветвлённой теории типов и теории типов Рамсея. Парадокс разрешается не тем, что мы ограничиваем область действия квантора, как это было у Рассела, но тем, что ограничиваются возможные значения символа. Ограничение возникает из-за того, что символы ‘F’ и ‘R’ обозначают совершенно по-разному. Если, как в данном случае, мы ограничиваемся элементарными функциями, то символ не может иметь отношении R к функции, если он не является элементарным, что и имеет место в случае с ‘F’. Те же самые аргументы будут работать, если мы в качестве возможных значений символа ‘ϕ’ возьмём функции более высоких порядков. Всё равно ‘R’ будет выражать отношение обозначения, которое не будет включать Fx, так как Fx будет относиться к более высокому порядку.

Аналогичным образом, т.е. апелляцией к значениям символов, разрешаются другие парадоксы группы *B*. Здесь самым интересным случаем, наверное, представляется парадокс *Лжеца*. Приведём решение Рамсея. Допустим, я говорю: «Я сейчас лгу». Тогда, как считает Рамсей, это высказывание следует анализировать следующим образом:

> ‘(∃ “p”, p) **:** Я говорю “p” **.** “p” означает p **.** ~p’. Здесь, чтобы получить определённое значение для *означает*, необходимо некоторым образом ограничить порядок ‘p’. Предположим, что ‘p’ должно относиться к n-ному или меньшему порядку. Тогда, если посредством ϕ_n символизировать функцию типа n, ‘p’ может быть $(\exists\phi_n)\ .\ \phi_{n+1}(\phi_n)$. Поэтому ∃‘$p$’ включает $\exists\phi_{n+1}$ и ‘Я сейчас лгу’ в смысле ‘Я сейчас утверждаю ложную пропозицию порядка n’ относится по крайней мере к порядку n+1 и не противоречит само себе [17. С. 70].

Это действительно оригинальное решение, коренным образом отличающееся от подхода Рассела. При решении данного парадокса у Рассела и речи не идёт об отношении обозначения, там просто говорится, что высказывание о высказывании относится к более высокому типу. Но Рамсей даёт иное решение, на которое указывает уже то, как он интерпретирует высказывание «Я сейчас лгу», используя дополнительную кванторную переменную. Этой дополнительной кванторной переменной (а именно, кванторной переменной ‘p’) является переменная символа, который обозначает определённым образом.

Разница с Расселом здесь, собственно, в следующем. Рассел интерпретирует парадокс *Лжеца* так: «Существует высказывание порядка n, которое я утверждаю и которое ложно», но при этом само это высказывание должно относиться к порядку $n + 1$ и не может являться значением присутствующей в нём мнимой переменной, на которую указывает выражение ‘существует’. Рамсей же утверждает, что в формулировке парадокса *Лжеца* основную роль играет не утверждение какого-то свойства относительно нашего предыдущего высказывания, но способ, которым мы это высказывание обозначаем. Поэтому дело не в том, каким образом указывается область действия квантора, а в том, как мы устанавливаем значение символов, которые выбраны для обозначения высказываний. Тогда речь должна идти не о высказываниях порядка n, но о символах, которые эти высказывания обозначают. Когда мы говорим: «Я утверждаю высказывание порядка n», тогда то, что подразумевается символом ‘n’, обозначает совершенно особым способом, который должен прямо фиксироваться в этом утверждении, а именно: «Я утверждаю высказывание типа n способом ‘n’». Тогда невозможность парадокса *Лжеца* относится к тому способу, которым обозначает мнимая переменная ‘p’, фигурирующая в высказывании ‘($\exists$ “p”, p) : Я говорю “p” . “p” означает p . $\sim p$’. Но само это высказывание ‘($\exists$ “p”, p) : Я говорю “p” . “p” означает p . $\sim p$’ не может подразумеваться в качестве возможного значения символа ‘p’, поскольку относится к другому порядку. Этим и разрешается парадокс *Лжеца*.

Здесь следует указать один очень важный, на наш взгляд, момент. Предложенные Рамсеем способы решения парадоксов Грелинга и *Лжеца* предполагают совсем иное прочтение того, как обычно формулируются эти парадоксы. Прочтения возможны разные, и от этих прочтений зависит возможность их различного решения. Именно прочтением парадоксов различаются подходы Рассела и Рамсея. Уточнение того, как символы относятся, к тому, что они обозначают, существенно отличается от того, как возможно сконструировать символы, для того, чтобы они были способны обозначать. Очевидно, что конструктивный подход к символам отличается от объективного подхода к тому, что они выражают. Более того, различие объективного подхода к значению символов и конструктивного подхода к их построению показывает, что решение семантических парадоксов (парадоксов группы B) не требует дополнительных технических средств, помимо тех, что представлены объективностью логики как науки. И здесь Рамсей, безусловно, прав. Нетрудно заметить, что и все остальные парадоксы группы B разрешимы на предлагаемых им основаниях. Таким образом, уточнение понятие значения символов позволяет разрешить все семантические парадоксы.

Самое интересное здесь то, что с технической точки зрения, а именно, возможности используемого символизма, реформированного с позиций *ЛФТ* Витгенштейна, результаты подхода, адаптированного Рамсеем, по следствиям абсолютно совпадают с разветвлённой теорией типов Рассела. По дедуктивным следствиям разветвлённая теория типов Рассела и теория типов Рамсея эквивалентны. Предназначенные для решения парадоксов определённого типа, они оказались равносильны. Это отмечает и сам Рамсей:

> Мои решения противоречий, очевидно, весьма похожи на решения Уайтхеда и Рассела, различие между ними основано просто на наших различных концепциях порядка пропозиций и функций. Для меня пропозиции сами по себе не имеют порядков; они, так же как и различные истинностные функции атомарных пропозиций, суть определённые совокупности, зависящие только от того, чем являются атомарные пропозиции. Порядки и логически неправильные совокупности приходят лишь с символами, которые мы используем, чтобы символизировать факты, различными усложнёнными способами [17. С. 71].

Однако дедуктивные следствия не должны отождествляться с содержательными предпосылками, которые, быть может, имеют гораздо большее значение для предприятия, стоящего столь важного изменения в понимании того, что представляет собой порядок функции. Действительно, теория типов, предложенная Рамсеем, дала совершенно новое понимание источников парадоксов, но это понимание дало и новое понимание источников математики в рамках логицистского к ней подхода. Во всяком случае, Рамсей показал, что логицистский подход может предполагать иное, отличное от подхода *PM*, отношение к возможности сведения математики к логике. Этот подход предполагает учёт более сложных моментов, в частности эпистемологических и лингвистических. Именно эти моменты как раз и обеспечили не только новизну, но и относительную завершенность логицистской программы[1].

---

[1] Здесь опять сошлёмся на Н.-Э. Салин: «Следует подчеркнуть, что рамсифицированная теория типов не должна рассматриваться как незначительное изменение или улучшение разветвлённой теории. Верно, что теория Рамсея не имеет каких-либо следствий для математики, отличных от *Principia Matematica*; обе теории формально эквивалентны. Но теория Рамсея обеспечивает *Principia Matematica* новым и значительно более твёрдым основанием, чем то, на котором она изначально основывалась. В принципе, с теорией Рамсея мы получаем новую *Principia Matematica*. Необходимо сказать, что ‘эти основания математики’ образуют пик, но также и конец традиции» [84. P. 174].

2.5. Математический реализм Рамсея

Давая оценку разветвлённой теории типов, Рассел писал:

> Теория типов ставит ряд трудных философских вопросов, касающихся её интерпретации. Однако эти вопросы, в сущности, отделимы от математического развития этой теории и подобно всем философским вопросам вводят элемент неопределённости, который не относится к самой теории. Следовательно, по-видимому, лучше формулировать эту теорию без ссылки на философские вопросы, оставляя их для независимого исследования» [27. С. 65].

Рассел, очевидно, разделяет технические вопросы развития теории типов и вопросы, связанные с её содержательной интерпретацией. Однако, как показали реформы, предпринятые Рамсеем, философские вопросы в рамках этой теории не отделимы от технических деталей, поскольку содержательные соображения оказывают существенное влияние на технический аппарат. Несмотря на то, что по следствиям, связанным с решением семантически парадоксов, разветвлённая теория типов и теория типов Рамсея эквивалентны, конструктивный подход Рассела разительно отличается от реалистского подхода Рамсея. К тому же для Рамсея важную роль играют сугубо семантические соображения, которые совершенно отсутствуют у Рассела. Иной смысл приобретает и программа сведения математики к логике, поскольку по-иному трактуется такое важное понятие, как функция. Поэтому остановимся несколько подробнее на некоторых содержательных соображениях, которыми руководствовался Рамсей, реформируя теорию типов. Следует учесть, что эти соображения тесно взаимосвязаны и даже имплицируют друг друга.

Начнём с того, что Рамсей отказывается от универсальной применимости принципа порочного круга при объяснении парадоксов и связанных с этим объяснением так называемых непредикативных определений. Касаясь принципа порочного круга, Рамсей пишет в письме к Френкелю:

> Факт в том, что так называемый “непредикативный процесс” бывает нескольких, существенно различных видов. Мне всегда казалось весьма плачевным, что использование Расселом принципа порочного круга имело тенденцию скрывать, что круг, от которого он стремился избавиться, был двух существенно различных видов.
>
> Я считаю, что в общем обсуждении непредикативных процессов есть три вещи, которые следует ясно различать.

> Во-первых, есть совершенно безобидный процесс описания объекта посредством ссылки на общность, членом которой является он сам; примером этого является “самый высокий человек в этой комнате”. Я не вижу никакого разумного возражения на этот процесс; у Рассела определённо не было такого возражения…
>
> Во-вторых, есть процесс образования класса, который является членом самого себя. Мне кажется, что возражение на этот процесс заключается не в том, что он является круговым, поскольку (если теория типов действительна) равным образом ошибочно предполагать, что класс не является членом самого себя, но просто в том, что он является бессмысленным… (Мне всегда казалось, что аргументы, посредством которых Рассел выводит эту часть теории типов из своего принципа порочного круга, были обманчивы, но что тем не менее эта теория была правильной, несмотря на ошибочную аргументацию).
>
> В-третьих, есть образование неэлементарного свойства обладания всеми свойствами определённого сорта. В этом заключается реальное затруднение, поскольку представляется, что это свойство последовательно поднимается до совокупности свойств, включённых в его определение и, поэтому, не может быть членом этой совокупности; тогда как в первом или безопасном виде непредикативного процесса описываемый объект, очевидно, не зависит от того способа, которым описывается[1].

Нетрудно заметить, что эти три момента по-разному отражаются в теории типов Рамсея. Первый непредикативный процесс, хотя и содержит круг, но в этом круге нет ничего порочного. Более того, именно отказ рассматривать данный круг как порочный позволяет модифицировать понятие предикативной функции. Второй непредикативный процесс исключается простой теорией типов, которая трактуется Рамсеем как средство, позволяющее избегать бессмысленных выражений. Преодоление порочного круга, присутствующего в третьей разновидности непредикативного процесса, связано с обособлением семантической составляющей формальной теории. Осмысление данного непредикативного процесса и связанной с ним группой парадоксов впервые позволило осознать семантические проблемы как проблемы *sui generis*, т.е. проблемы функционирования символизма, с помощью которого формулируется теория, начи-

[1] Письмо Рамсея Френкелю от 26.01.1928 опубликовано в качестве приложения к статье [62. P. 109–110].

нают трактоваться как отличные от проблем, касающихся объективного содержания самой теории. В этом отношении Рамсей является одним из родоначальников логической семантики как особой дисциплины, рассматривающей собственный круг проблем и использующей своеобразные методы.

Другое дело, что Рамсей, хотя и осознаёт принципиальное различие двух видов проблем, всё-таки пытается объединить их в рамках единой теории типов. Интересна его мотивация. В частности, он пишет:

> Этот взгляд на вторую группу противоречий не является оригинальным. Например, Пеано решил, что “Exemplo de Richard non pertine ad Mathematica, sed ad linguistica”, и поэтому отбросил его. Но такая установка не вполне удовлетворительна. У нас есть парадоксы, включающие как математические, так и лингвистические идеи; математики отбрасывают их, говоря, что ошибка должна заключаться в лингвистическом элементе, но лингвисты равным образом вполне могут отбросить их по противоположной причине, и противоречие никогда не будет разрешено. Единственное решение, которое когда-либо было дано, содержащееся в *Principia Mathematica*, определённо приписывает эти противоречия плохой логике, и необходимо ясно показать оппонентам этой точки зрения ошибку в том, что Пеано называл лингвистикой, но что я предпочёл бы назвать эпистемологией, которой обязаны эти противоречия [17. С. 39].

Эта мотивация более свойственна философу, нежели математику, поскольку Рамсей стремится не только описать, но и объяснить. Хотя Рамсей чётко осознаёт различие парадоксов группы *A*, обязанных плохой логике, и парадоксов группы *B*, обязанных неверно трактуемому понятию значения символов, он всё-таки объединяет решение математических и лингвистических проблем в рамках единой теории, что сближает его с подходом Рассела, на которого в данном случае он, возможно, ориентировался. Это серьёзно отличается от подхода, например, А. Тарского, который чётко разделяет язык-объект и метаязык, где в первом выражается содержание теории, а во втором принципы её символизма. Первое и второе не просто различаются как моменты в рамках единой теории, но представляют собой разные теории.

Указанная выше дифференциация непредикативных процессов очень тесно связана у Рамсея с важной философской предпосылкой. Имеется в виду позиция реализма относительно природы математических объектов, которой Рамсей придерживался во время написания *ОМ*. Приведём цитату, где эта позиция выражается наиболее отчётливо:

> Говоря о пропозициях, мы, в общем, будем подразумевать типы, примерами которых являются индивидуальные символы, и будем включать типы, для которых примеров, возможно, нет. Это неизбежно, поскольку для нас не имеет никакого значения, утверждал ли или выразил ли кто-нибудь символически пропозицию; мы должны рассмотреть все пропозиции в смысле всех возможных утверждений, независимо от того, утверждались они или же нет.
>
> Любая пропозиция выражает согласование и несогласование с дополнительными множествами истинностных возможностей атомарных пропозиций; и, наоборот, для любого множества таких истинностных возможностей было бы логически возможным утверждать согласование с одними пропозициями и несогласование со всеми другими, и, стало быть, множество истинностных возможностей определяет пропозицию. На практике эта пропозиция может быть крайне трудной для того, чтобы выразить её силами нашего языка, ибо нам недостаёт как имён для множества объектов, так и методов создания утверждений, включающих бесконечное число атомарных пропозиций, кроме относительно простых случаев … Тем не менее мы должны рассмотреть и те пропозиции, для выражения которых наш язык не подходит [17. С.53].

Что же получается? Рамсей рассматривает функции по их объективному значению, а не по тому, как они строятся с точки зрения возможностей используемого нами языка. При этом задействуется реалистский взгляд на функции, в корне отличный от конструктивистского, который ориентируется на возможности нашего их построения. С точки зрения объективного подхода функция может быть какой угодно, но лишь в том случае, если мы принимаем их объективное существование. Любой подход, подразумевающий, что функция зависит от возможностей нашего её символического выражения, ограничен возможностями действующего логика, т.е. конкретного человеческого существа, и не должен относиться к логике, если мы рассматриваем её как объективную науку, столь же объективную, сколь объективной должна рассматриваться математика.

Здесь руководящей идеей, по-видимому, выступает философское представление о том, что то, что мы должны выразить, может в корне отличаться от тех средств, которые у нас для этого есть. И нетрудно заметить, что эта идея является руководящей для всей западноевропейской философии, основной мотив которой определялся поиском средств для выражения того, что хотелось бы выразить. Точно так же поступает и Рамсей. С одной стороны, есть то, что мы хотим выразить, т.е. объективное значение функций, с другой стороны, есть средства, с помощью которых мы это можем сделать, т.е. конечные средства символического выражения. Эти средства у Рамсея трактуются не так, как у Рассела, но они всё равно реализуются в рамках единой традиции. Традиции, которая основана на противопоставлении того, что нужно, и того, что можно. Рамсей выбирает первую, Рассел – вторую. Конструктивные особенности разветвлённой теории типов Рассела снимаются объективистским подходом Рамсея, и это, вероятно, ведущая философская предпосылка, лежащая в основании рамсифицированной теории типов[1].

Реалистическую позицию Рамсея необходимо чётко осознавать, поскольку при её отрицании предлагаемое им техническое решение оказывается бессмысленным[2]. Это особенно важно, поскольку в ра-

[1] В этом отношении нельзя согласиться с Майером, который разделяет у Рамсея две идеи – философскую и техническую: «Решение Рамсея инспирировано … двумя ведущими идеями. Одна идея является подлинно философской, другая – простой, но остроумной технической идеей… Философская идея может быть перефразирована с помощью утверждения: существует больше вещей (между небесами и землёй), чем мы можем *наименовать*, *описать* или обозначить некоторым иным, более или менее непосредственным способом. Хотя это утверждение не звучит очень ‘философски’, оно, в свою очередь, является весьма сильным ориентиром в тандеме с технической идеей… Техническая идея может быть охарактеризована утверждением, что нет логических причин ограничивать число аргументных мест в истинностных функциях до конечного числа аргументов, или, если выражаться позитивно, то число аргументов в истинностных функциях может быть *бесконечным* и должно рассматриваться в логическом исчислении функций как бесконечное» [66. P. 175]. Однако очевидно, что обе эти идеи являются столь же философскими, сколь и техническими. Особенности технического решения приводят Рамсея к реализму, а реалистическая позиция в отношении математических объектов позволяет реализовать техническую идею.

[2] Это, например, ясно осознаёт С. Клини: «Рамсей обнаружил, что желаемые результаты, и только они, могут быть, по-видимому, получены без иерархии порядков (т.е. при помощи *простой теории типов*). Он классифицирует известные антиномии, разделяя их на два рода, именуемые теперь «логическими» (например, антиномии Бурали-Форти, Кантора и Рассела) и «эпистемологическими» или «семантическими» (например, антиномии Ришара и Эпименида), и он заметил, что логические антиномии (по-видимому) исключаются простой иерархией типов, а семантические (по-видимому) не могут появиться внутри символического языка простой теории типов из-за отсутствия в ней тех средств, которые требуются для описания выражений того же языка. Но доводы Рамсея для обоснования непредикативных определений внутри данного типа предполагают понятие совокупности всех предикатов этого типа как существующей независимо от их конструируемости или определяемости. Эти доводы были названы «теологическими». Таким образом,

ботах по математической логике и основаниям математики это часто игнорируется. Принимается позиция Рамсея относительно трактовки принципа порочного круга и достаточности простой теории типов для решения логических антиномий. Однако следует учесть, что вместе с этим принимается и позиция математического реализма, трактующего математические объекты как существующие независимо от познавательных возможностей и конструктивных способностей логика. С принятием технического решения необходимо принять и философскую позицию Ф. Рамсея.

ни Уайтхеду и Расселу, ни Рамсею не удалось конструктивным путём достичь логистической цели» [10. С. 47].

3. ТОЖДЕСТВО, ОПРЕДЕЛИМЫЕ КЛАССЫ И ЭКСТЕНСИОНАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

3.1. Концепция тождества в «Логико-философском трактате» Л. Витгенштейна

Выше в § 1.3 указывалось, что, с точки зрения Рамсея, неправильная интерпретация тождества в *PM* приводит к неверному пониманию аксиомы бесконечности и аксиомы мультипликативности, поскольку искажает смысл экстенсионального понимания математики и склоняет к эмпирической трактовке этих аксиом. Их предвзятая интерпретация, основанная на неверном понимании тождества, опять-таки служит отвержению программы логицизма. Для реабилитации программы Рамсей строит новую концепцию тождества, которая в основных выводах согласовывалась бы с выводами *PM*, но была бы свободна от возражений. Поскольку свою интерпретацию тождества Рамсей во многом (как позитивно, так и негативно) связывает с позицией Витгенштейна, начнём с концепции тождества в *ЛФТ*.

В *ЛФТ* Витгенштейн высказал идею о возможности такой символической системы, которая не содержала бы знака, выражающего тождество вещей. При этом Витгенштейн отталкивался от критики некоторых фундаментальных положений *PM*. То, что Витгенштейн выражает в *ЛФТ* афористично, Рамсей пытается осуществить технически и сталкивается с рядом затруднений, что позволило ему сказать:

> Я посвятил некоторое время развитию такой теории и нашёл, что она сталкивается с тем, что представляется мне непреодолимыми трудностями [17. С. 35].

В результате Рамсей отказывается от идеи Витгенштейна, развивая собственную теорию, основанную на введении специфических пропозициональных экстенсиональных функций (propositional function in extension), и представляет вызывающие сомнения утверждения *PM* в виде тавтологий и противоречий. Однако эти трудности весьма интересны ввиду ряда технических деталей, которые Рамсей разрабатывает для их преодоления. Ниже будет рассмотрена теория тождества Витгенштейна и те изменения, которые вносит в неё Рамсей и которые, в конечном счёте, послужат разработке его собственной оригинальной теории тождества.

Своё отношение к тождеству Витгенштейн высказывает в двух местах *ЛФТ*. В афоризмах 4.241–4.243 в контексте анализа структуры элементарного предложения выражения с тождеством вида '$a = b$' рассматриваются как уравнивание значений знаков 'a' и 'b'. '$a = b$' подразумевает только то, что знак 'a' заменим знаком 'b'. Таким образом, выражения с тождеством являются определениями, т.е. символическими правилами замены одних выражений другими. Поэтому

> выражения формы '$a = b$' являются только средством изображения; они ничего не говорят о значениях знаков 'a' и 'b' [4. 4.242].

В этом отношении выражения формы '$a = b$' не являются подлинными элементарными предложениями, которые Витгенштейн рассматривает как функцию имён, записывая в форме 'fx', '$\phi(x, y)$' и т.д., и которые в случае истинности указывают на то, что атомарный факт существует, а в случае ложности – на то, что атомарный факт не существует [4. 4.25]. Однако знак '=' не выражает подлинной функции и употребляется лишь для указания на то, что два знака имеют одно и то же значение [4. 4.241].

Такой взгляд на тождество радикально отличается от подхода Рассела и Уайтхеда в *PM*, где знак '=' используется для установления тождества и различия объектов. Однако у Витгенштейна выражения с тождеством ничего не говорят *о* значении знаков, но говорят только то, что значение знаков одинаково. Отсюда вытекает существенно иное понимание частных случаев выражений с тождеством. Возьмём, например, выражение '$a = a$'. В структуре *PM* данное выражение понимается как аналитическое утверждение о самотождественности объекта. Сходным образом понимаются выводимые из него выражения, например '$(\exists x) . x = a$', или выражения, аналогичные по форме, например '$(x) . x = x$'. Однако если в выражениях с тождеством речь идёт не об объектах, т.е. не о том, на что указывают знаки, а о взаимозаменимости или синонимичности знаков, то подобные выражения теряют смысл. Действительно, как пишет Витгенштейн,

> если я, например, знаю значение английского и значение синонимичного ему немецкого слова, то я не могу не знать, что они синонимы; невозможно, чтобы я не мог перевести их одно в другое [4. 4.243].

То есть интерпретация тождества в качестве синонимичности знаков‘*a*’ и ‘*b*’ свидетельствует о том, что оно не может использоваться как сообщение, выражающее действительное содержание. Что же касается выражений вроде ‘$a = a$’, то они вообще ничего не могут говорить, они лишь могут засвидетельствовать графическую эквивалентность знака самому себе, что излишне, поскольку графическая эквивалентность видна из самой записи. Отсюда, видимо, следует, что синонимичность выражений есть условие самотождественности объекта, а не её следствие, поскольку

> если я, например, знаю значение английского и значение синонимичного ему немецкого слова, то я не смогу не знать, что они синонимы; невозможно, чтобы я не мог перевести их одно в другое [4. 4.243].

Поэтому, как считает Витгенштейн,

> выражения вида ‘$a = a$’ или выведенные из них не являются ни элементарными предложениями, ни другими осмысленными знаками [4. 4.243].

Обоснование своей точки зрения и соотношение своей позиции с позицией, выраженной в *PM*, Витгенштейн излагает в афоризмах 5.53 – 5.5352. В пользу того, что тождество не является отношением между объектами, выдвигаются три аргумента. Они могут пониматься по-разному, здесь же приведём лишь те моменты, которые важны для последующего обсуждения.

Первый аргумент основан на различии выражений вида ‘$(x) : fx . \supset . \phi(x, a)$’ и ‘$(x) : fx . \supset . x = a$’, которые кажутся одинаковыми по форме. Но эта видимость обманчива. Первое выражение говорит о том, что если объект удовлетворяет функцию f, то он находится в отношении $\hat{\phi}$ к *a*. И действительно, при определённых интерпретациях ‘f’ и ‘ϕ’ выражение ‘$(x) : fx . \supset . \phi(x, a)$’ могло бы быть истинным и могло бы быть ложным. Так, например, если взять натуральный ряд чисел и интерпретировать свойство $\hat{f}$ как свойство ‘быть простым числом’, отношение $\hat{\phi}$ – как отношение ‘быть больше’, а константе ‘*a*’ приписать значение 0, то получится истинное утверждение, что всякое простое число больше нуля. При той же интерпретации с заменой значения константы ‘*a*’ на число более 2 получаем ложное утверждение. Поскольку осмысленность предложения для Витгенштейна означает именно его возможность быть истинным и быть ложным, т.е. возможность изображать существование и несуществование фактов [4. 4.3], данный пример указывает на то, что выражение ‘$(x) : fx . \supset . \phi(x, a)$’ на самом деле является осмысленным предложением. Однако, как считает Витгенштейн, второе выражение ‘$(x) : fx . \supset . x = a$’

> говорит просто то, что *только a* удовлетворяет функцию *f*, а не то, что только такие вещи удовлетворяют функцию *f*, которые имеют определённое отношение к *a* [4. 5.5301].

То есть в данном выражении речь идёт не о реальном отношении объектов, но лишь о том, что на место переменной ‘x’ в ‘fx’ может быть подставлен лишь один знак, а именно ‘a’. Поэтому выражение ‘$(x) : fx . \supset . x = a$’ должно пониматься не как говорящее о фактах, но как говорящее о символических соглашениях. И действительно, какие факты могло бы описывать такое выражение? При любом понимании свойства $\hat{f}$ оно могло бы иметь смысл только в том случае, если ‘x’ принимает единственное значение (т.е. a), которое имеет отношение тождества к самому себе. Но

> можно, конечно, сказать, что как раз *только a* имеет это отношение к *a*, но, чтобы выразить это, мы нуждаемся в самом знаке тождества [4. 5.5301].

Поэтому использование знака тождества в подобных контекстах уже предполагает его использование в виде ‘$a = a$’, что, как указывалось выше, излишне. Таким образом, хотя ‘$(x) : fx . \supset . \phi(x, a)$’ и ‘$(x) : fx . \supset . x = a$’ кажутся одинаковыми по форме, на самом деле они совершенно различны, поскольку знаки ‘ϕ’ и ‘=’ играют в них разную роль. ‘ϕ’ выражает подлинное отношение, тогда как ‘=’ – нет. Соответственно, ‘$(x) : fx . \supset . \phi(x, a)$’ является осмысленным предложением об отношении объектов, тогда как ‘$(x) : fx . \supset . x = a$’ – нет.

Второй аргумент связан с тем, как в *PM* определяется знак ‘=’, где определение равенства имеет следующий вид:

***13.01** $x = y \mathbin{.} =_{def} \mathbin{:} (\phi) \mathbin{:} \phi!\, x . \supset . \phi! y$.

> Данное определение означает, что *x* и *y* будут называться тождественными, когда каждая предикативная функция, которая удовлетворяется *x*, также удовлетворяется *y* [39. Т. 1. С. 245].

То есть два предмета суть один предмет, если все их предикативные свойства одинаковы. Витгенштейн возражает:

> Расселовское определение ‘=’ не годится, так как согласно ему нельзя сказать, что два объекта имеют общими все свойства [4. 5.5302].

Это возражение затрагивает два момента. С одной стороны, если все свойства одинаковы, то речь должна идти об одном объекте, а если речь идёт о разных объектах, то свойства должны быть разными. С другой стороны, как можно иметь одинаковыми все свойства, если речь идёт о разных объектах, поскольку только различие свойств может свидетельствовать о различии объектов. Если они разные, то их различие уже фиксировано, а если они не различны, то никакое различие зафиксировать в данном символизме нельзя. Здесь действительно возникает парадокс. Равенство, согласно представлению Рассела, должно свидетельствовать, что утверждается существование двух объектов, но определение говорит, что эти два объекта суть один объект. Однако с точки зрения здравого смысла уравнивание одного двум в рамках символической системы бессмысленно, поскольку два никогда не равно одному. И если мы принимаем данное утверждение, то оно должно иметь существенные основания. Но, с точки зрения Витгенштейна, такое уравнивание невозможно, в силу принимаемой им онтологии. А именно: два объекта различны только потому, что они различны, и если они различны, тогда их два. В частности, в *ЛФТ* утверждается: «Объект прост» [4. 2.02], и вследствие этого «два объекта различаются только тем, что они разные» [4. 2.0233]. То есть логически возможно, что все свойства объектов одинаковы, но отсюда не следует, что они представляют собой один объект. И действительно, утверждение, что объекты различны при полном совпадении их свойств, противоречия не содержит. Поэтому о двух объектах можно сказать, что все их свойства одинаковы, и при этом говорить именно о двух объектах, чего нельзя сделать в системе *PM*.

Из предыдущего утверждения следует третий аргумент:

> Сказать о *двух* предметах, что они тождественны, бессмысленно, а сказать об *одном* предмете, что он тождественен самому себе, значит ничего не сказать [4. 5.5303].

Действительно, утверждение о равенстве *двух* объектов – бессмысленно (вопреки системе *PM*), в силу различия их свойств, поскольку они всё-таки представляют собой два объекта, так как они, что утверждалось выше, в этом случае имеют разные свойства, а утверждение о тождественности объекта самому себе опять-таки, как говорилось выше, есть утверждение о графической эквивалентности знака самому себе, что должно быть видно из самой записи этих знаков.

Основываясь на этих аргументах Витгенштейн в *ЛФТ*, в противовес определению тождества в системе *PM*, принимает следующее соглашение:

> Тождество объектов я выражаю тождеством знаков, а не с помощью знака тождества. Различие объектов – различием знаков [4. 5.53].

В соответствии с принятым соглашением Витгенштейн предлагает использовать в символической системе только те выражения, которые не используют знак тождества. Так, в случае констант, обозначающих конкретные объекты, предлагается писать не '$f(a, b) \,.\, a = b$', но '$f(a, a)$' или '$f(b, b)$', а вместо '$f(a, b) \,.\, \sim a = b$' предлагается '$f(a, b)$' [4. 5.531]. Аналогично для выражений с кванторами: «не '$(\exists x, y) \,.\, f(x, y) \,.\, x = y$', но '$(\exists x) \,.\, f(x, x)$'; и не '$(\exists x, y) \,.\, f(x, y) \,.\, \sim x = y$', но '$(\exists x, y) \,.\, f(x, y)$'» [4. 5.532]. Если же тождественность или различие объектов специально не оговаривается, как, например, в случае выражений вроде '$(\exists x, y) \,.\, f(x, y)$', то предлагается запись '$(\exists x, y) \,.\, f(x, y) \,.\vee.\, (\exists x) \,.\, f(x, x)$', где первый дизъюнкт указывает на возможное различие, а второй – на возможное совпадение объектов, где данное добавление никакой роли не играет, поскольку дизъюнкция говорит лишь о том, что два объекта либо одинаковы, либо – нет, а это – тавтология. И если мы это добавим, то ничего не изменится. То есть '$(\exists x, y) \,.\, f(x, y)$' не изменится, поскольку добавление тавтологии, вроде '$(\exists x, y) \,.\, f(x, y) \,.\vee.\, (\exists x) \,.\, f(x, x)$', ничего изменить не может.

Отсюда, в частности, вытекает, что вместо выражения '$(x) : fx \,.\supset.\, x = a$' можно использовать запись '$(\exists x) \,.\, fx \,.\supset.\, fa : \sim(\exists x, y) \,.\, fx \,.\, fy$', которая означает не то, что любой x, выполняющий $\hat{f}$, тождественен a, но то, что при наличии a, выполняющего $\hat{f}$, неверно, что нечто ещё выполняет $\hat{f}$. Аналогичное соглашение касается выражений, вроде «только один x удовлетворяет $f()$», которое в соответствующей записи утверждает, не то, что любой объект, не находящийся в отношении тождества с x не выполняет $\hat{f}$, но только то, что ‘$(\exists x) . fx : \sim(\exists x,y) . fx . fy$’ (т.е. только то, что x выполняет $\hat{f}$, и ничто другое не выполняет $\hat{f}$) [4. 5.5321].

Таким образом, поскольку, согласно предлагаемым Витгенштейном соглашениям, знак тождества можно исключить из способов обозначения, «знак тождества не является существенной составной частью логической символики» [4. 5.533], а выражения вроде ‘$a = a$’, ‘$a = b . b = c. \supset a = c$’, ‘$(x).x = x$’, ‘$(\exists x).x = a$’ являются псевдопредложениями и «в правильной логической символике даже не могут быть написаны» [4. 5.534].

С помощью тождества в *PM* выражается ряд важных содержательных утверждений. Например, с помощью ‘$\sim(\exists x) . x = x$’ выражается то, что предметов не существует. Однако, с точки зрения Витгенштейна, это является не просто псевдопредложением, так как включает знак тождества, оно логически неоправданно, поскольку

> даже если это было бы предложением, разве оно не было бы истинным, даже если действительно “предметы существовали”, но при этом не были бы тождественны самим себе [4. 5.5352].

Ещё более важно замечание Витгенштейна о несущественности знака тождества в связи с аксиомой бесконечности. При задании любого класса, в том числе и бесконечного, Рассел использует знак тождества для того, чтобы различать входящие в этот класс объекты. Однако, поскольку с точки зрения принимаемого Витгенштейном соглашения о том, что различные объекты обозначаются различными знаками, необходимость в таком задании классов исчезает. Это касается и аксиомы бесконечности, утверждающей, что существует класс, больший любого заданного класса, поскольку

> то, что должна высказать аксиома бесконечности, могло бы выразиться в языке тем, что имеется бесконечно много имён с различным значением [4. 5.535].

Бесконечное множество имён, с точки зрения Витгенштейна, вполне может свидетельствовать о бесконечности обозначаемых ими предметов.

3.2. Рамсей о концепции тождества Витгенштейна

Ф.П. Рамсей впервые обращается к проблеме тождества в рукописи «Тождество», опубликованной в составе его архивного наследия [81. P. 155–169]. Здесь он солидаризируется с точкой зрения Витгенштейна, в некоторых моментах усиливая его аргументацию как в формальном, так и в содержательном отношениях. Следуя Витгенштейну, он считает, что привычный взгляд на тождество, выраженный в *PM*, как на реальное отношение между объектами и, соответственно, рассмотрение ‘$x = y$’ в качестве пропозициональной функции, является ошибочным. Выражение ‘$x = y$’ не является пропозициональной функцией, потому что её значения не могут быть пропозициями, т.е. истинными или ложными утверждениями о фактах. Как и Витгенштейн, Рамсей считает, что выражения вида ‘$a = b$’, которые получаются из ‘$x = y$’ заменой переменных на константы, ничего не говорят о фактах, поскольку, если ‘a’ и ‘b’ суть имена одной вещи, эти выражения не утверждают ничего более, как самотождественность вещи, а если ‘a’ и ‘b’ суть имена разных вещей, то эти выражения бессмысленны, поскольку утверждают, что две вещи суть одна. Даже если предположить, что в первом случае выражения вида ‘$a = b$’ являются тавтологиями, а во втором – противоречиями, это проблемы не решает, поскольку, вслед за Витгенштейном, тавтологии и противоречия Рамсей рассматривает только как истинностные функции элементарных пропозиций, которые, хотя и не говорят ничего о фактах, но не являются бессмысленными. Они являются двумя крайними случаями распределения истинностных значений, где в случае тавтологии при любых истинностных возможностях у составляющих её элементарных пропозиций распределение всегда даёт истину, а во втором случае распределение всегда даёт ложь. Но очевидно, что выражения вида ‘$a = b$’ не могут быть истинностными функциями элементарных пропозиций и, следовательно, данное предположение также ошибочно.

На тех же основаниях, что и Витгенштейн, Рамсей отвергает определение тождества в *PM*. Говорить о двух объектах, что они тождественны, если все их свойства одинаковы, – ошибочно, поскольку такое определение делает невозможным утверждение, что у двух объектов все свойства одинаковы. Однако вопрос о возможности совпадения у двух объектов всех свойств – это не вопрос о том, имеет ли это место фактически, но вопрос о логической возможности. Причём это касается не только таких объектов, как индивиды, обозначаемые индивидными константами вроде ‘*a*’ и ‘*b*’. Рамсей утверждает, что для пропозициональных функций – это часто является истинным:

> Предположим, что все разумные животные беспёры и двуноги, и наоборот. (Я рассматриваю это просто как пример истинного эмпирического обобщения.) Тогда, поскольку все функции от функций экстенсиональны, у “*x* – разумное животное” и “*x* – беспёрое и двуногое” все свойства общие. Но отсюда не следует, что эти функции тождественны, что на самом деле – это одна и та же пропозициональная функция, поскольку “Это – разумное животное” и “Это беспёрое и двуногое” суть явно разные пропозиции и, логически говоря, это просто случайность, что они всегда вместе истинны или ложны [81. P. 156].

Отсюда следует, что в *PM* доказательства, касающиеся тождества, ошибочны. В частности, ошибочно доказательство, что две различных вещи не могут иметь все свойства общими. Это доказательство основано на том, что если *a* и *b* различны, то *a* должно иметь свойство, которого не имеет *b*, а именно, свойство быть тождественным с *a*:

> Ошибка, конечно, заключается в предположении, что «быть тождественным с *a*» является свойством. Ибо, как я уже отмечал, “$x = a$” не является пропозициональной функцией [81. P. 156].

На основании этих доводов Рамсей принимает точку зрения Витгенштейна, что знак тождества не является существенной составной частью логической символики, и тождество объектов должно выражаться тождеством знака, а различие объектов – различием их знаков, т.е. различные знаки должны иметь различные значения. Всё это, считает Рамсей, позволяет Витгенштейну отрицать тождество неразличимых и записывать: “$(\exists x, y) : (\varphi) \,.\, \varphi x \equiv \varphi y$”, а именно, что существуют такие различные вещи, у которых все свойства общие, т.е. то, что в системе *PM* считается невозможным.

Надо сказать, что Рамсей не просто принимает точку зрения Витгенштейна. Он расширяет её основу, рассматривая возможные возражения. Первое возражение касается утверждения того, что две вещи имеют все свойства общими. Насколько осмысленным будет такое утверждение? Возможность именования этих вещей в данном утверждении различными именами влечёт, что они обладают разными свойствами, а именно, они наименованы разными именами. Но может ли различие наименования служить достаточным основаниям различия вещей? С точки зрения Рамсея, различие именования не свидетельствует о различии свойств. Выше это уже было показано относительно пропозициональных функций вроде “*x* – разумное животное” и “*x* – беспёрое и двуногое”. Добавим, что именование поразному вряд ли означает различие свойств, поскольку это отношение касается не отношений объектов, но отношения обозначающих эти объекты знаков. И очевидно, что это отношение не выражается функцией, где аргументом является объект, т.е. эта функция относится не к вещам, но к знакам. Значит, вопрос относится не к различию вещей, но к возможности различия знаков. А этот вопрос имеет логический, но не фактический характер. Действительно, различие знаков касается внешнего выражения, а не того, что выражается:

> Я не могу привести два индивида, которые имеют общими все свойства, но это не показывает, что я не могу вообразить или поверить, что такое бывает. На самом деле я могу предположить, что на Земле есть два человека, имеющих одно и то же количество волос на голове, не зная, кто они. Точно так же я могу предположить, что существуют две неразличимых вещи, не зная, что они собой представляют [81. P. 157].

Второе возражение касается того, что две вещи можно спутать, т.е. считать их за одну, и поэтому рассматривать ‘$a = b$’ не как псевдопредложение, а как осмысленную пропозицию, в которую можно верить. Если исключить случай осознанной уверенности в том, что две различные, реальные вещи на самом деле являются одной, а именно так можно интерпретировать уверенность в выражениях вроде ‘$a = b$’ или ‘$(\exists x).\ x = a$’ (хотя такое может быть в случаях изменённого состояния сознания или психического нездоровья, но этот пример Рамсей не рассматривает), как случай явной бессмыслицы, остаётся вариант искреннего заблуждения. Действительно, можно спутать две вещи, именуя их одним именем и приписывая одной из них то, что присуще другой. Однако, как считает Рамсей, в этом случае тождество не используется. Искреннее заблуждение не предполагает явного отождествления разных вещей, поскольку в этом случае «одна вещь не мыслится вместо другой, ибо это включало бы их различие и образование пропозиции, в которой они встречались бы раздельно под разными именами ‘*a*’ и ‘*b*’» [81. P. 158], т.е. в этом случае искреннее заблуждение уже не было бы заблуждением. При заблуждении просто получается ложная пропозиция, не включающая знака тождества. Приведу пример. Допустим, я знаком с близнецами Петром и Иваном, при этом Пётр женат, а Иван – нет. Я осмысленно употребляю предложение "Пётр и Иван – близнецы", используя разные имена 'Пётр' и 'Иван'. Допустим, я встречаю Ивана с женой Петра и принимаю Петра за Ивана. При этом я могу высказывать суждения. И эти суждения могут быть как истинными, так и ложными, но они никогда не будут включать то, что я принимаю Петра за Ивана, т.е. при всём моём понимании различия имён 'Пётр' и 'Иван', никогда ни вслух, ни мысленно не буду произносить: "Я считаю Петра за Ивана" или, точнее, "Я отождествляю 'Петр' и 'Иван'".

Однако самое важное возражение касается определённых дескрипций, поскольку, если 'a' или 'b' являются определёнными дескрипциями, то '$a = b$' может казаться осмысленным предложением. Указывая на возможность этого возражения, Рамсей не даёт на него ответа, но ответ можно реконструировать, исходя из общих установок Рамсея и Витгенштейна, который я здесь представлю. Концепция определённых дескрипций Б. Рассела связана с особенностями функционирования описательных фраз вроде "учитель Платона", "автор *Веверлея*" или, если брать систему *PM*, описание математических констант, вроде «число, выражающее отношение величины диаметра к величине окружности». Вещи, описываемые этими фразами, имеют собственные имена, а именно: 'Сократ', 'Вальтер Скотт' и 'число π' соответственно. Рассел рассматривает определённые дескрипции как одноместные функции, записываемые в системе *PM* как '$\iota x(\phi x = a)$', что прочитывается как 'тот x, который выполняет функцию ϕ, является a. В этом случае утверждения типа «Сократ – это учитель Платона» или «Число π – это число, выражающее отношение величины диаметра к величине окружности» и т.п., представляющие частный случай тождества, являются вполне осмысленными, поскольку означают: «Тот x, который является учителем Платона, это – Сократ» или «Число x, выражающее отношение величины диаметра к величине окружности, – это число π» и т.п. Однако в силу ряда соображений, и, надо отметить, весьма существенных соображений, Рассел считает определённые дескрипции тем, что выражает свёрнутое или сокращённое описание предмета [24]. С его точки зрения, дескриптивные фразы, относящиеся к одному объекту, должны указывать на существование и единственность этого объекта. Поэтому дескриптивная фраза вроде "учитель Платона" должна прочитываться как «Существует x, который является учителем Платона, и этот x единственный», а дескриптивная фраза ‘число π’ – «Существует число x, которое выражает отношение величины диаметра к величине окружности, и это x единственное». Таким образом, утверждение, включающее дескриптивные фразы, при адекватном понимании должно включать развёрнутое выражение описательной фразы. Например, «Сократ – это учитель Платона» преобразуется в утверждение, что «учитель Платона существует, он единственен и является никем иным, как Сократом». Существование в данном случае выражается кванторной переменной, выполняющей указанное свойство, единственность – тем, что любая другая вещь, выполняющая данное свойство, совпадает с первой, а указание на Сократа выражается тождеством. То есть получается: «Существует x, и этот x является учителем Платона, при этом любой y, являющийся учителем Платона, совпадает с x, и этот x есть Сократ». То же самое относится к ‘число π’. Если мы говорим, что «Число π – это число, выражающее отношение величины диаметра к величине окружности», это подразумевает, что «Существует число x, и это число x выражает отношение величины диаметра к величине окружности, при этом любое число y, выражающее отношение величины диаметра к величине окружности, совпадает с числом x, и это x есть π».

При формализации утверждения подобного рода в системе *PM* представимы следующим образом: “$\exists x : \phi x \,.\, (y) : \phi y \supset x = y \,.\, x = a$”, т.е. “при некотором x, обладающим свойством $\hat{\phi}$, если какой-то y обладает свойством $\hat{\phi}$, то этот y совпадает с x, и $x = a$”. Как относиться к тождеству в этих выражениях? Здесь имеет место два вхождения знака тождества. Первое из них, по-видимому, должно восприниматься непосредственно в духе бессмысленных выражений, как его понимают и Витгенштейн, и Рамсей. Действительно, если мы принимаем соглашение, что разные вещи обозначаются разными именами, оно становится бессмысленным, вроде выражения ‘$(\exists x).\ x = a$’, поскольку любое имя, отличное от исходного, уже обозначает иную вещь, поэтому прямое указание на это отличие является излишним. А значит, в системе *PM* первым вхождением тождества, пытаются указать на то, что уже и так ясно, если принять соглашение Витгенштейна и обозначать разными именами разные вещи. Остаётся второе вхождение тождества. Но второе вхождение тождества, очевидно, имеет иной смысл, и этот смысл вполне сопоставим с приведённым выше утверждением Витгенштейна из *ЛФТ*, афоризм [4, 5.5301]. Процитируем его ещё раз:

> ‘$(x) : fx . \supset . x = a$’ говорит просто то, что *только a* удовлетворяет функцию f, а не то, что только такие вещи удовлетворяют функцию f, которые имеют определённое отношение к a.

То есть данное вхождение тождества не является тождеством в подлинном смысле, т.е. оно не утверждает о тождественности вещей, но говорит лишь о том, что единственный знак выполняет данную функцию, что опять-таки касается не отношения вещей, а отношения знаков, что может быть выполнено произвольными символическими соглашениями, а не утверждениями о природе того, что обозначается. Один знак может выполнять функцию другого знака, и это всё, что может быть выражено в рамках символической системы. Значит, и здесь знак тождества является лишь символическим соглашением и говорит не о вещах, предметах, объектах и т.п., но о том, что о них говорится.

Защита принятого Витгенштейном соглашения, что разные вещи должны обозначаться разными знаками, а один знак всегда должен обозначать одну вещь, не ограничивается у Рамсея ответами на возможные возражения. Дело в том, что при принятии этого соглашения возникает ряд затруднений. Попытку разрешить эти затруднения можно рассматривать как вклад Рамсея в решение проблемы, известной как проблема коллизии переменных [9. С. 65]. Если мы принимаем соглашение Витгенштейна, каким образом тогда должны интерпретироваться формулы, в которых встречаются переменные, попадающие в область действия разных кванторов? Рамсей задаётся вопросом:

> Должны ли мы говорить, что x не может принимать то же самое значение, что и y, если y входит в ту же самую пропозицию, или правило должно быть некоторым образом ограничено? [81. P. 158].

Возьмём, например, следующее выражение: “$(x). fx : \vee : (\exists y) . \varphi y$”. В каком смысле следует говорить, что “x” и “y” не должны принимать в нём одно и то же значение, т.е. на место этих индивидных переменных не должны подставляться одни и те же константы. В системе *PM* этот вопрос решался бы просто, поскольку там нет ограничений на подстановку констант вместо переменных. В системе *PM* ограничение, позволяющее избежать коллизии переменных, всегда можно выразить явно, используя знак тождества. Так, для приведённой формулы “$(x). fx : \vee : (\exists y) . \varphi y$” возможны два варианта: (1) “y” может принимать какое-то значение, отличное от “x”, при этом “x” может принимать любое значение; (2) “x” может принимать какое-то значение, отличное от “y”, но “y” может принимать любое значение. Эти два варианта легко записываются в системе *PM*, используя тождество. Для первого варианта получится: “$(x): fx . \vee . (\exists y) . y \neq x . \varphi y$”; для второго: “$(\exists y):. \varphi y . \vee : (x) : x \neq y . \supset . fx$”. Что означает “Или все вещи выполняют $f\hat{x}$, или существует какая-то вещь, выполняющая $\varphi\hat{x}$” и “Или некая вещь выполняет $\varphi\hat{x}$, или все вещи, кроме одной, выполняют $f\hat{x}$” соответственно. Однако, если мы отказываемся от применения знака тождества, то не всё так просто. Каким образом здесь можно применить соглашение Витгенштейна? Опять же в выражениях вроде “$fa . \vee (x) . {\sim}fx$” должна быть возможность для ‘x’ принимать значение ‘a’, ибо в противном случае мы не смогли бы от “$fa . \vee (x) . {\sim}fx$” перейти к “$fa \vee {\sim}fa$”, что является частным случаем закона исключённого третьего. Видимо, всё-таки следует сохранить тот смысл выражений вроде “$(x). fx : \vee : (\exists y) . \varphi y$” и “$fa . \vee (x) . {\sim}fx$”, который был им присущ в системе *PM* и позволял ‘x’ и ‘y’ принимать все возможные значения. Как считает Рамсей,

> мы должны быть способны трактовать “$(x). fx$” как единство, имеющее значение, независимое от того, что ещё встречается в данной пропозиции [81. P. 158].

С другой стороны, сущность соглашения, принимаемого Витгенштейном, заключается в том, что в выражениях вроде “$(x): (\exists y) . \varphi(x, y)$” выражение ‘$y$’ не может принимать значение ‘x’, поскольку смысл этого выражения подразумевает, что “для любого x существует такой отличный y, что $\varphi(x, y)$”.

Рамсей предлагает уточнить соглашение Витгенштейна следующим образом:

> Две различные константы не должны имеет одно и то же значение. Кажущаяся переменная не может иметь значение какой-либо буквы, встречающейся в её *сфере*, если буква не является *кажущейся* переменной *в этой сфере* [81. P. 159].

Разъясняется это следующим примером. В “$(\exists y) . \varphi(x, y)$” сферой ‘$y$’ является ‘$\varphi(x, y)$’, и в этой сфере встречается ‘x’. Хотя ‘x’ на самом деле может оказаться кажущейся (или связанной) переменной, она не является таковой в этой сфере и поэтому ‘y’ не может принимать значение ‘x’. Однако если принять “$F(x)$” = “$(\exists y) . \varphi(x, y)$”, то ‘$x$’ в “$F(x)$” может принимать значение ‘y’, поскольку, хотя ‘y’ встречается в сфере $F(x)$, она уже является кажущейся (или связанной) в этой сфере.

Следующее затруднение возникает в связи с определениями. Возьмём, например, “$(x) . f(x, a)$”, что подразумевает: “Для всех x, кроме a, $f(x, a)$”, и введём определение: “$F(x) =_{\text{def}} f(x, a)$”. Тогда из “$(x) . f(x, a)$” получается “$(x) . F(x)$”, что подразумевает: “Для всех x $F(x)$”, поскольку ‘a’ здесь не встречается. А если опять использовать определение, то получится “Для всех x $f(x, a)$”, что имеет совершенно иной смысл, чем первоначальное выражение. Значит, в подобных случаях определения не являются простыми соглашениями, но изменяют смысл первоначальных выражений.

Даже если мы примем соглашение, что область ‘x’ в “$(x) . F(x)$” должна зависеть от констант вроде a, b и т.п., это было бы крайне неудобно в двух отношениях. Во-первых, это «противоречило бы духу символического исчисления, в котором мы не должны думать о том, что обозначают наши знаки» [81. P. 159]. Во-вторых, это исключало бы определения вида “$F(x) =_{\text{def}} (y)\varphi(x, y)$”, поскольку в таких случаях сфера ‘x’ зависела бы от всех констант, поскольку они являются значениями ‘y’, и никакой сферы для ‘x’ не оставалось бы вообще. Выбраться из затруднения можно, если соглашение Витгенштейна принять в уточнённой Рамсеем форме, а именно, сфера ‘x’ должна зависеть только от букв, встречающихся в её сфере, а не от констант, встречающихся в значении этой сферы. Правда, тогда изменяется смысл определения “$F(x) =_{\text{def}} f(x, a)$”, поскольку “$(x) . F(x)$” не будет эквивалентно “$(x) . f(x, a)$”, но будет эквивалентно “$(x) . f(x, a) \cdot f(a, a)$”, где второй конъюнкт ‘$f(a, a)$’ явно указывает на независимость ‘x’ в ‘$f(x, a)$’ от a. Очевидно, что подобный подход, *mutatis mutandis*, применим к другим аналогичным случаям. Однако этот подход предполагает пересмотр всех подобных определений, но Рамсей не считает это «непреодолимым затруднением», во всяком случае такой пересмотр не может заставить отказаться от соглашения, что разные вещи должны обозначаться различными знаками.

Третье затруднение связано с выражениями, включающими утверждение о нетождественности объектов вроде “$(\exists x) : x \neq a \cdot fx$”, что означает: “Существует такой x, нетождественный с a, который выполняет f". Это выражение допускает прямую переформулировку без использования знака тождества, поскольку то же самое можно выразить, записав: "$\sim fa\ .\supset .\ (\exists x)\ .\ fx\ .:\ fa\ \ .\supset :\ (\exists x, y) : fx \cdot fy$", что означает: "Если a не выполняет f, то существует такой x, который выполняет f, а если a выполняет f, то f выполняют по крайней мере две вещи".

Но можно поступить и по-другому, используя уточнённое Рамсеем соглашение Витгенштейна. Решение данного затруднения связано просто с тем, чтобы исключить 'a' из области действия 'x', что можно сделать, включив 'a' явно в сферу 'x'. Это можно сделать, например, с помощью следующего определения: "$F(x, a) = =_{\mathrm{def}} f(x)$". Тогда то, что выражает пропозиция "$(\exists x) : x \neq a \cdot fx$", можно было бы выразить просто "$(\exists x)\ .\ F(x, a)$", поскольку согласно уточнённому соглашению в последнем выражении a уже исключается из области действия 'x'.

Рамсей предлагает ещё один способ решения данного затруднения, который задействует не определения, но тавтологии и противоречия. Кстати, этот способ он использует и при решении других проблем, которые рассмотрим ниже. Всё дело в том, чтобы опять включить 'a' явно в сферу 'x'. Для упрощения записи примем следующее определение для символа тавтологичной функции: для общего случая – "$T(x) =_{\mathrm{def}} (\varphi) : \varphi x\ .\vee .\ \sim\varphi x$", а если используется константа, то переменная заменяется данной константой и квантор, естественно, исчезает (например, "$T(a) =_{\mathrm{def}} \varphi a\ .\vee .\ \sim\varphi a$"). Тогда выражение "$(\exists x) : x \neq a \cdot fx$" представимо в виде "$(\exists x) : fx \cdot T(a)$". Здесь опять-таки a исключается из области действия 'x', будучи включено в её сферу. При незначительной модификации то же самое можно сделать с помощью противоречия, используя определение "$C(x) =_{\mathrm{def}} \sim T(x)$".

Указывая в *ЛФТ*, что символическая система может и должна обходиться без знака тождества, если принять соглашение об обозначении разными знаками разных объектов, а одним знаком всегда одного объекта, Витгенштейн, однако, не ставит вопрос о том, можно ли преобразовать такую символическую систему, как система *PM,* таким образом, чтобы она соответствовала этому соглашению. Этот вопрос ставит Рамсей. Действительно, если бы такой перевод был возможен, это существенно упрощало бы дело, поскольку значимыми оставались бы все результаты *PM*, независимо от того, принимаем мы соглашение Витгенштейна или же нет.

Переход из символической системы, основанной на соглашении Витгенштейна, в систему *PM* достаточно прост, поскольку к исходным выражениям нужно будет лишь добавить утверждение о нетождественности объектов. Так, например, выражение вида “$f(a, b)$” переводилось бы как “$f(a, b) \; . \; a \neq b$”, выражение вида “$(\exists x) \; . \; f(x, a)$” – как “$(\exists x) \; . \; x \neq a \; . \; f(x, a)$” и т.п.

Обратный перевод, т.е. перевод выражений *PM* в систему, основанную на соглашении Витгенштейна, не вызывает затруднений в случае, если выражения не содержат знака тождества. Здесь достаточно воспользоваться приведёнными выше правилами записи из афоризмов 5.531 и 5.532 *ЛФТ*, переводя, например, выражение ‘$(\exists x,y) \; . \; f(x,y)$’ в выражение ‘$(\exists x,y) \; . \; f(x,y) \; . \vee . \; (\exists x) \; . \; f(x,x)$’ и т.п.

Затруднения возникают при переводе выражений, содержащих знак тождества. В *PM* знак тождества трактуется как обычная пропозициональная функция, которая в результате перевода должна исчезнуть. Для осуществления такого перевода Рамсей использует хитроумный приём. Он вводит два дополнительных определения: “$x = x \; . =_{\text{def}} \; . \; T(x)$” и “$x = y \; . =_{\text{def}} \; . \; C(x, y)$”, где “$T(x)$” – тавтологичная, а “$C(x, y)$” – противоречивая функция. К тому же очевидно, что отрицание дефиниендума даёт отрицание дефиниенса, и в данном случае тавтология становится противоречием, а противоречие – тавтологией, т.е. “$x \neq x$” даёт “$C(x)$”, а “$x \neq y$” даёт “$T(x, y)$”. Используя эти определения, перевод можно осуществить следующим образом. Возьмём, например, выражение “$(\exists x, y) : x \neq y \cdot f(x, y)$”. Поскольку знак тождества трактуется как обычная функция, то для его перевода мы должны воспользоваться правилом, приведённым в конце предыдущего абзаца. Получится выражение “$:. \; (\exists x, y) : x \neq y \cdot f(x, y) : \vee : (\exists x) : x \neq x \cdot f(x, x)$”. С помощью приведённых выше определений последнее выражение преобразуется в “$(\exists x, y) : T(x, y) \cdot f(x, y) : \vee : (\exists x) : \mathrm{C}(x) \cdot f(x, x)$”. Дальнейшие преобразования осуществляются на основании свойств логических союзов. Рассмотрим второй дизъюнкт. Он представляет собой конъюнкцию, включающую противоречие, и, согласно свойствам конъюнкции, сам является противоречием. Согласно свойствам дизъюнкции, противоречивый дизъюнкт можно опустить. Следовательно, остаётся первый дизъюнкт “$(\exists x, y) : T(x, y) \cdot f(x, y)$ ”, который представляет собой конъюнкцию, включающую тавтологию. Согласно свойствам конъюнкции, тавтологичный конъюнкт можно опустить. Таким образом, остаётся выражение

“$(\exists x, y) \,.\, f(x, y)$”, не содержащее знака тождества, т.е. требуемый перевод осуществлён.

Интересно, что подобный перевод может быть осуществлён и для тех выражений из *PM*, которые Витгенштейн считает бессмысленными псевдопредложениями. В этом случае они переводятся в осмысленные пропозиции, включая тавтологии и противоречия. Возьмем, например, такое выражение: “$(\exists x) \,.\, x = a$”. Если тождество трактуется здесь как обычная функция, тогда, используя правило Виттгенштейна, как в предыдущем случае, получаем: “$(\exists x) \,.\, x = a \,.\vee.\, a = a$”. С помощью определений последнее выражение преобразуется в “$(\exists x) \,.\, x = a \,.\vee.\, T(a)$”. Поскольку один из дизъюнктов в данном выражении является тавтологией, то в соответствии со свойствами дизъюнкции получаем тавтологию “$T(a)$”. Таким образом, введение соглашения Витгенштейна вместе с правилами перевода позволяет

> найти удовлетворительное значение для этих пропозициональных форм, которые сами по себе являются бессмысленными; а это очень удобно, поскольку означает, что любая пропозиция, сконструированная в *PM* с использованием $x = y$ в качестве пропозициональной функции будет иметь смысл [81. P. 164].

При решении проблемы тождества остаётся ещё одно затруднение, и Рамсей, пожалуй, считает его самым важным. Выше рассматривались только такие выражения с тождеством, где фигурировали константы и кажущиеся (или связанные, т.е. попадающие в область действия квантора) переменные. Но что будет, если некоторые переменные окажутся действительными (или свободными) переменными, т.е. не попадающими в область действия никакого квантора, а некоторые – кажущимися (или связанными). В этом случае неважно, какую из систем, основанную на соглашении Витгенштейна или систему *PM*, мы возьмём. Для удобства, ввиду взаимопереводимости, можно рассмотреть такую ситуацию, где соглашение Витгенштейна действует для констант и действительных переменных, а фигурирующий при этом знак тождества относится только к таким переменным, лишь некоторые из которых являются кажущимися, т.е. находятся в области действия какого-нибудь квантора.

Возьмём простейший случай, где фигурируют две переменные ‘x’ и ‘y’. В качестве примера рассмотрим выражение с экзистенциальной квантификацией. Здесь возможны два варианта: “$(\exists x) : x = y \cdot \varphi x$” и “$(\exists x) : x \neq y \cdot \varphi x$”. Первый случай легко переопределить, указав на то, что y выполняет все те же функции, что и x. Но как быть со вторым вариантом? Рамсей считает, что второй вариант репрезентирует идею, отличную от обобщения “$(\exists x) . \varphi x$”. Последнее выражение предполагает, что ‘x’ может принимать любое значение. Однако “$(\exists x) : x \neq y \cdot \varphi x$”, с точки зрения Рамсея, репрезентирует идею исключительности или выделенности и подразумевает, что ‘x’ может принимать «любое значение за исключением y». Поэтому такие выражения должны рассматриваться как неопределяемые и явным образом добавляться к символической системе как исходные, примитивные идеи. Конечно, эти идеи можно, как делалось выше, переопределить в системе, основанной на соглашении Витгенштейна. В этом случае рассматриваемое выражение приобретёт вид “$(\exists x) . \varphi x \cdot T(y)$”.

> Но сомнительно, есть ли реальное преимущество в применении соглашения Витгенштейна, поскольку это приведёт к усложнению трактовки определения, что может уравновесить преимущество обходиться без этих исходных идей [81. P. 167].

Безусловно, введение подобных примитивных идей усложняет символическую систему, и гораздо проще было бы обойтись без них, вернувшись к тождеству, как оно определяется в *PM*. Однако, как считает Рамсей,

> хотя это и было бы *проще*, это было бы *ошибочно*, поскольку не давало бы нам логического символизма для выражения таких обычных форм, вроде “только a выполняет $\varphi \hat{x}$”. Мы были бы способны символически выразить лишь “только те вещи, которые обладают всеми свойствами a, выполняют $\varphi \hat{x}$”, а это не одно и то же [81. P. 168].

Действительно, такой подход не репрезентировал бы идею исключительности или выделенности какой-то вещи, но предполагал бы идентификацию множества свойств, что выражалось бы в символической системе совершенно иначе. И крайне сложным вопросом был бы вопрос о возможности перевода первого во второе.

В целом, попытка Рамсея скорректировать соглашение Витгенштейна или учесть нюансы функционирования тождества, не предусмотренные ни Витгенштейном, ни системой *PM,* приводят к всё большему усложнению символической системы, в которой фигурирует идея тождества и различия вещей. Действительно, проще было бы сохранить расселовское определение тождества или даже ввести “$x = y$” как исходную, примитивную идею, что позволило бы освободиться от всех приведённых выше уточнений Рамсея. В этом случае не нужно было бы корректировать соглашение Витгенштейна или вводить дополнительные примитивные идеи. Однако во всех случаях Рамсей предпочитает эти усложнения и модификации. Дело, видимо, в том, что Рамсей принимает критику Витгенштейна, дополненную им самим, способа функционирования знака тождества в системах вроде *PM*. Но проблема не в том, чтобы совершенно отказаться от этого знака. Если принимается идея тождества и различия вещей, проблема заключается в том, чтобы «объяснить и оправдать употребление $x = y$ как пропозициональной функции, которой она не является» [81. P. 168].

Это объяснение и оправдание в целом являются объяснением и оправданием философской идеи тождества или, вернее, возможности символического выражения этой идеи, которая не сводима к выражению обычной пропозициональной функции. Все уточнения Рамсея служат этой цели. Несмотря на то, что $x = y$ не является пропозициональной функцией, мы

> вполне можем оправдать употребление $x = y$ в качестве пропозициональной функции. Благодаря нашим определениям мы можем распространить любые пропозиции относительно “$(x) \,.\, \varphi x$” на случай, где φx не является действительной пропозициональной функцией, но частично составлена из псевдофункций вроде $x = y$ и т.п. [81. P. 168].

Однако следует заметить, что подобные уточнения и переопределения могут уходить в бесконечность. Можно ли учесть все возможные нюансы употребления идеи тождества в том смысле, в котором её поддерживают системы, основанные на соглашении Витгенштейна, или системы вроде *PM*? Нюансы можно множить, и совершенно не очевидно, что Рамсей учёл их все. Стремление учесть все возможные нюансы – дело бесперспективное, хотя и многое проясняющее.

3.3. Определяющие функции и определимые классы в *Principia Mathematica*

В двух предыдущих параграфах рассматривалась критика Л. Витгенштейном, представленная им в *ЛФТ*, теории тождества из *PM*, а идеи Рамсея рассматривались как возможное дополнение данной критики и как попытка развития этой критики с учётом предложенного в *ЛФТ* перевода записи, использующей тождество в *PM*, в запись без тождества. Запись без тождества, даже если учитывать все достижения из *ЛФТ*, испытывает значительные затруднения, что и демонстрирует Рамсей, используя предложения Витгенштейна как прямо, так и со значительными модификациями в способах записи и их интерпретации. Значительные затруднения, рассмотренные в § 3.1 и 3.2, показывают, что предложенный Витгенштейном перевод может быть осуществлён только лишь с уходом в бесконечность допущений.

Теперь рассмотрим те положения из *PM*, которые как раз и подверглись критике в *ЛФТ*, а затем проанализируем подходы Витгенштейна и Рамсея к истолкованию содержания математики, которое первый трактует как уравнивание знаков (лингвистическую конвенцию), позволяющее использовать подстановку одних выражений вместо других, а второй в *ОМ* – как особый тип тавтологий, характеризующих взаимосвязи в рамках символической системы, основанных на истинностных значениях пропозиций. Важность различения этих подходов позволяет охарактеризовать эволюцию направления логицизма в основаниях математики, считающего, что математика является продвинутой частью логики.

Рассмотрим, прежде всего, с какой целью в *PM* вводится знак ‘=’, который, как уже указывалось выше, в соответствии с принципом отождествления неразличимых Лейбница, определяется следующим образом:

***13.01** $x = y =_{def} : (\phi) : \phi!x . \supset . \phi!y$,

данное определение означает, что x и y будут называться тождественными, когда каждая предикативная функция, которая удовлетворяется x, также удовлетворяется y [39, Т. 1, С. 245].

Исключительно важная роль знака тождества в *PM* связана с тем, что с его помощью вводится общее понятие класса, конкретные классы и определение конкретных чисел (в частности, 0, 1 и 2) [39. Т. 1. С. 266–277, 396–429], которое потом развивается в общее определение понятие кардинального числа как класса всех равночисленных классов, т.е. классов, элементы которых находятся во взаимно однозначном соответствии [39. Т. 2. С. 67–114]. Рассмотрим эти функции знака '=' последовательно.

Начнём с того, что под классом Рассел и Уайтхед понимают совокупность элементов, удовлетворяющих какую-то пропозициональную функцию, т.е. функцию, определенную на некоторой предметной области, которая своим значением имеет истину и ложь. Таким образом, каждая пропозициональная функция определяет некоторый класс, который составляют те, и только те аргументы функции, для которых она является истинной [39. Т. 1. С. 265]. Так, функция 'x – разумен', заданная на множестве живых существ, определяет класс людей, поскольку только для элементов данного класса она является истинной. В формальной записи из *PM* функция $\phi\hat{x}$, скажем, соответствующая свойству разумности, определяет класс $\hat{x}(\phi x)$, класс тех элементов x, которые обладают этим свойством, т.е. класс людей.

При этом вполне возможно, что один и тот же класс может определяться различными функциями. Функции, определяющие один и тот же класс, т.е. являющиеся истинными для одних и тех же аргументов, называются формально эквивалентными. Так, например, функции 'x – разумен' и 'x – имеет мягкую мочку уха', определённые на множестве живых существ, являются формально эквивалентными, поскольку истинны для одних и тех же аргументов, а, значит, определяют один и тот же класс. Т.е. функции $\phi\hat{x}$ и $\psi\hat{x}$, соответствующие данным свойствам, могут определять один и тот же класс, т.е. классы $\hat{x}(\phi x)$ (класс разумных существ) и $\hat{x}(\psi x)$ (класс существ, имеющих мягкую мочку уха) могут совпадать, т.е. являться одним классом, а именно классом людей.

Однако функции, даже если они формально эквивалентны, с точки зрения определения истинностных значений высказывания, в которые они входят, могут играть разную роль. Во-первых, если истинность высказывания определяется только с точки зрения возможных аргументов функции, т.е. зависит только от определяемого функцией класса, то такая функция называется экстенсиональной. Во-вторых, если истинность высказывания зависит от особенностей того, как задаётся сама функция, то такая функция называется интенсиональной. Так, например, в высказываниях "Сократ – разумен" и “Все люди разумны” (или формально “ϕa” и “$(x) . \phi x$”) функция ‘x – разумен’ (т.е. функция $\phi\hat{x}$) – экстенсиональна, поскольку, если мы заменим её на функцию ‘x – имеет мягкую мочку уха’ (т.е. на $\psi\hat{x}$), истинностное значение соответствующих высказываний не изменится. Действительно, “Сократ имеет мягкую мочку уха” и “Все люди имеют мягкую мочку уха” будут столь же истинными, как и высказывания “Сократ – разумен” и “Все люди разумны”, поскольку истинность данного высказывания зависит исключительно от аргументов функции, составляющих один и тот же класс. Другими словами, экстенсиональность функций определяется тем, что если они формально эквиваленты (т.е. имеет место $\phi x \,.\equiv_x .\, \psi x$), то они заменимы в любых контекстах (в частности, $(x)\phi x \,.\equiv.\, (x)\psi x$).

В отличие от экстенсиональных функций интенсиональные функции этим свойством не обладают. Так, если мы возьмём высказывание “Иван считает, что все люди разумны”, то здесь функция ‘x – разумен’ является интенсиональной, поскольку Иван не обязан знать, что все люди имеют мягкую мочку уха, а, следовательно, высказывание “Иван считает, что все люди имеют мягкую мочку уха” не обязательно будет истинным. В данном случае замена $\phi\hat{x}$ на $\psi\hat{x}$ может приводить к изменению истинностного значения всего высказывания, а, следовательно, функция $\phi\hat{x}$ является интенсиональной.

Таким образом, экстенсиональные функции в *PM* определяются, как функции, которые взаимозаменимы во всех контекстах, а именно, относительно свойства экстенсиональности функции f от функции $\phi!\hat{z}$ имеет место следующее утверждение:

$$\phi!x \,.\equiv_x .\, \psi!x : \supset_{\phi,\psi} : f(\phi!\hat{z}) \,.\equiv.\, f(\psi!\hat{z}),$$

т.е. формально эквивалентные предикативные функции экстенсиональны, если они выполняются для одних и тех же аргументов во всех контекстах. Экстенсиональные функции чрезвычайно важны, поскольку,

> когда функция $\phi!\hat{z}$ экстенсиональна, её можно рассматривать как нечто, присущее классу, определяемому $\phi!\hat{z}$, поскольку её истинностное значение не изменится, пока не изменится класс [39. Т. 1. С. 266].

Поскольку, с точки зрения Рассела и Уайтхеда, все интересные с точки зрения математики функции являются экстенсиональными, постольку в математике ими можно и ограничиться. Это важно в связи с тем, что таким образом достигается значительное упрощение, поскольку вместо экстенсиональных функций можно тогда говорить об определяемых этими функциями классах, хотя Рассел с Уайтхедом и считают классы логическими фикциями. Упрощение достигается, в частности, тем, что вместо различных экстенсиональных функций, определяющих один и тот же класс, можно говорить о самом этом классе, поскольку классы, определяемые такими функциями, тождественны или равны. Равенство между классами определяется путём буквального применения приведённого выше определения ***13.01** к определяющим функциям с соответствующей модификацией, учитывающей, что уравниваются не индивиды, а логические фикции, состоящие из этих индивидов:

> ***20.15** $\vdash :. \psi x . \equiv_x . \chi x : \equiv . \hat{z}(\psi z) = \hat{z}(\chi z)$,
> два класса идентичны тогда и только тогда, когда определяющие их функции формально эквивалентны. Это основное свойство классов [39. Т. 1. С.267].

Знак “=” применяется в *PM* не только для установления отличительных характеристик классов, но и при задании особых классов, в частности пустого и универсального. В этом случае тождество выступает в качестве определяющей класс функции. Универсальный класс (‘$\vee$’ в символике *PM*, предложение ***24.01**) определяется следующим образом:

$$\vee =_{def} \hat{x}(x = x),$$

т.е. универсальный класс задаётся как класс самотождественных индивидов. Здесь определяющая класс функция сводится к равенству индивидов, обладающих одними и теми же свойствами. Универсальный класс можно было бы задать и каким-то другим свойством, которым обладают все индивиды, но в пользу равенства говорит то, что оно, в отличие от любых других свойств, хорошо описывается формально, поскольку задаётся однозначным определением. Действительно, т.к. предметы равны, если все их свойства одинаковы, то для единственного предмета это утверждение превращается в аналитическое тождество. Как утверждается в *PM*:

любое другое свойство, присущее всему, работает так же хорошо, как и “$x = x$”, но это единственное из таких свойств, которое мы до сих пор изучали [39. Т. 1. С. 293].

Следовало бы добавить, что до сих пор это свойство изучалось именно потому, что его можно определить значимым образом. Аналогичным образом определяется нуль-класс, или пустой класс, который рассматривается как дополнение к универсальному и который можно задать через отрицание определяющего универсальный класс свойства (т.е. $\wedge =_{def} \hat{x}\,(x \neq x)$). Определённые таким образом универсальный и пустой классы, а также общее определение класса позволяют развить стандартную булеву алгебру классов, представляющую собой математизированную интерпретацию традиционной логики [39. Т. 1. С. 265–289, 293–306]. Все соотношения, предлагаемые классической аристотелевской силлогистикой, выполняются точно так же, как выполняются все соотношения, предлагаемые булевой алгеброй классов.

Универсальный и нулевой класс позволяют интерпретировать традиционную логику. Но этого недостаточно для цели, которая ставится в *PM*. Введение знака “=” связано не столько с тем, чтобы определить класс вообще или такие классы, как универсальный или нулевой, хотя нулевой класс и играет в дальнейшем определении в *PM* кардинальных и ординальных чисел важную роль. Это связано, прежде всего, с тем, что с его помощью, вернее с помощью обозначаемого им свойства, или, лучше сказать (согласно приведённым выше определениям), с помощью определимых им классов, можно ввести классы, содержащие точно определённое количество индивидов, поскольку классы с точно определённым количеством индивидов позволяют затем ввести понятие конкретных чисел и на этой общей основе затем разъяснить и определить общее понятие числа.

Действительно, если мы просто ограничиваемся понятием класса, предполагая, что он не универсальный и не нулевой, то возникает вопрос: «А можно ли на приведённых основаниях определить класс, содержащий точное количество индивидов, и при этом количество индивидов находилось бы в пределе от $\wedge$ до $\vee$?». Т.е. можно ли задать такую определяющую класс функцию, которая бы точно определяла количество предметов. Рассел и Уайтхед считают, что такие функции можно задать, как раз используя определяемое ими в ***13.01** тождество объектов.

Прежде всего, в *PM* вводится единичный класс, т.е. класс, содержащий только один индивид. Это важно, поскольку класс, не содержащий индивидов, уже есть, а именно класс $\wedge$, а все следующие классы должны содержать большее количество индивидов. И резонно, что таким следующим классом должен быть класс, содержащий хотя бы один индивид. Единичный класс, т.е. класс, содержащий один элемент, в *PM* вводится так:

> Мы вводим новую дескриптивную функцию $\iota' x$, означающую "класс термов, идентичных терму x" или, что то же самое, "класс, единственный элемент которого есть x". Таким образом, $\iota' x =_{def} \hat{y}(y = x)$ [39. Т. 1. С. 405],

т.е. "$\iota' x$" определяется через указание единственности объекта, входящего в класс, так как этот класс задаётся как класс всех тех элементов y, которые идентичны элементу x, т.е. единичный класс определяется как класс всех тех объектов, которые идентичны некоторому выбранному элементу. Здесь, как и в случае с универсальным классом, видимо, можно было бы использовать другое свойство, т.е. опять-таки, равенство использовать не обязательно, если бы только можно было найти свойство, которое однозначно определяет класс с единственным элементом. И хотя в *PM* на это явно не указывается, можно сказать, что тождество, выражаемое как "=", используется в силу простоты, задаваемой формальным определением ***13.01**.

Подобным образом, с использованием равенства, определяется класс, состоящий из двух элементов. В этом случае класс задаётся как объединение элементов, тождественных некоторому x, и элементов, тождественных некоторому y (в символике *PM* $\iota' x \cup \iota' y$). При этом для того, чтобы обеспечить наличие именно двух элементов в данном классе, добавляется условие, опять-таки использующее тождество, а именно, необходимо, чтобы $x \neq y$, поскольку в противном случае опять получился бы единичный класс. Различие элементов задаётся через их нетождественность. То есть класс, содержащий два элемента, в полном выражении записывается, например, так: $\hat{y}(y = x) \cup \hat{z}(\mathrm{z} = v)$, при этом необходимо указать, что $x \neq v$. Так мы получаем класс, состоящий из пары элементов. Нетрудно заметить, что подобным образом можно получить не только пары, но и любые классы, состоящие из нужного нам количества элементов. Более того, в *PM* рассматриваются не только просто пары, но и упорядоченные пары, что сделать (опять-таки используя равенство) совсем нетрудно. Нужно только пару определить таким образом, чтобы было ясно, какой элемент идёт первым. А значит, поскольку можно задать любые классы с нужным количеством элементов, можно задать и любые классы, где эти элементы упорядочены.

Таким образом, отталкиваясь от понятия формально эквивалентных экстенсиональных функций, в системе *PM* можно перейти к классам, и не просто к классам, но к классам с точно определённым количеством элементов и даже к классам, где эти точно определённые элементы упорядочены. А это уже крайне важно, поскольку с точки зрения классов в *PM* вводятся основные понятия математики, а именно, понятия кардинального и ординального числа.

Остановимся только на кардинальных числах. Общее определение понятия кардинального числа как класса всех классов, находящихся во взаимно однозначном соответствии, вводится в начале второго тома *PM*:

> Кардинальное число класса α, которое мы будем обозначать “Nc’α”, определяется как класс всех классов, подобных α [39. Т. 2. С. 57][1].

Ещё ранее в первом томе *PM* на основании определения конкретных конечных классов вводятся конкретные кардинальные числа. В частности, в определениях:

***54.01.** $0 =_{def} \iota' \wedge$

***52.01.** $1 =_{def} \hat{\alpha}\,\{(\exists x)\,.\,\alpha = \iota' x\}$

***54.02.** $2 =_{def} \hat{\alpha}\,\{(\exists x,y)\,.\,\mathrm{x} \neq \mathrm{y}\,.\,\alpha = \iota' x \cup \iota' y\}$,

вводятся 0, 1 и 2, что в соответствии с приведёнными выше определениями конкретных классов означает, что 0 – это пустой класс, 1 – это класс всех единичных классов, 2 – это класс всех двухэлементных классов. Определения подобного рода нетрудно продолжить для других чисел. Во втором томе для удобства определения конкретных кардинальных чисел с точки зрения общего определения понятия

[1] В принципиальных чертах это определение повторяет определение числа у Г.Фреге, первоначально предложенное в [40]. Правда, у Фреге речь идёт об объёмах понятий, но это не играет существенной роли, поскольку понятие класса выполняет в *PM* ту же самую роль, что и понятие объёма у Фреге.

кардинального числа и введённого в конце второго тома понятия индуктивного числа для того, чтобы задать порождение класса всех кардинальных чисел, в обозначение, конечно, вводится подобие классов, но для существа дела это особого значения не имеет. В основании понятия подобия опять-таки лежит знак ‘=’ как указание на равночисленность используемых в определении конкретных чисел классов. Таким образом, понятие числа, а вместе с ним и вся математика, основываются в *PM* на теории классов, а также теории тождества, без которых и общая теория классов, и определения конкретных классов оказались бы невозможной.

3.4. Различия в понимании тождества у Витгенштейна и Рамсея

Понятно, что критика Витгенштейном и присоединившимся к нему Рамсеем теории тождества обессмысливает аргументацию, принятую в *PM*, фактически делая невозможным адекватное определение понятия класса и производных от него понятий[1]. Уже тезис Витгенштейна, что «два объекта различаются только тем, что они разные» [4. 2.0233], утверждает, что два объекта, имеющие все свойства одинаковыми, могут быть различны (и в этом нет никакого логического противоречия), а, следовательно, неверным оказывается и определение ***13.01** со всеми вытекающими для всех остальных определений последствиями.

Для Витгенштейна здесь нет проблем, поскольку он в принципе считает, что «теория классов в математике совершенно излишня» [4, 6.031]. Это связано с тем, что, с его точки зрения, способы задания классов в *PM* не являются логически необходимыми, поскольку уже задание универсального и пустого класса зависят от того, могут ли объекты обладать свойством самотождественности. Ответ на этот вопрос зависит скорее от свойств нашего физического мира, нежели

[1] Здесь нельзя не согласиться с М. Мэрионом: «Исключение Витгенштейном тождества непосредственно ведёт к важному критицизму теории кардинальных чисел в *Principia Manhematica*. Для демонстрации этого достаточно обратиться к тому, как вводится единичный класс в ***52** и пары кардинальных чисел в ***54**. Кардинальное число 2 определяется в ***54.02** как класс всех пар формы $\iota'x \cup \iota'y$ (где $x \neq y$), последнее определяется как “ класс, чьими единственными членами являются x и y”, поскольку, если есть третий элемент z в $\iota'x \cup \iota'y$, тогда $(z = x) \vee (z = y)$ (***51.232**). Так, пары имеют форму: $((x = a) \wedge (y = b)) \vee ((x = c) \wedge (y = d) \wedge \ldots$ (Здесь, конечно, знак ‘=’ выражает не математическое равенство, но логическое тождество)» [67. P. 353]. Действительно, критика Витгенштейна тождества не оставляет камня на камне от большей части *PM*.

от логики, которая говорит только о возможности его описания, но равенство обозначений в рамках описания не говорит ничего необходимого о самом мире. Однако, как считает Витгенштейн, «общность, употребляемая в математике, – не *случайная* общность» [4. 6.031]. Поэтому Фреге-Расселовское определение конкретных чисел он заменяет понятием чисел как показателей операций [4. 6.021], осуществляемых при переходе от одного предложения к другому. При этом общее понятие числа определяется как общая форма построения всех таких показателей [4. 6.03], когда определена общая форма всех возможных предложений [4. 6], основанных на таких построениях[1]. Эти построения не выходят за рамки символического конструирования пропозициональных функций, и на этой основе считаются Витгенштейном не выходящими за рамки аналитического, необходимого знания, т.е. они ничего не говорят о мире, но являются лишь преобразованием языковых выражений.

В соответствии с таким подходом к понятию числа интерпретируются и предложения математики, относительно которых Витгенштейн считает, что они «не выражают никакой мысли» [4. 6.21], но являются уравнениями [4. 6.2], в которых уравниваются способы выражения, и это затрагивает лишь то, что обозначает, но не то, что обозначается, при этом «если два выражения связаны знаком равенства, то это означает, что они взаимозаменимы. Но имеет ли это место – должно быть видно из самих этих двух выражений» [4. 6.23]. И далее:

> В уравнении существенно то, что оно не необходимо для того, чтобы показать, что оба выражения, связываемые знаком равенства, имеют одинаковое значение, так как это может быть понято из самих этих двух выражений [4. 6.232].

Таким образом, всё ограничивается лишь уровнем выражений, но не тем, что они обозначают. Функции '=' переводятся Витгенштейном с уровня объектов на уровень знаков. Тождество, используемое в *ЛФТ*, больше не является тождеством в смысле *PM*. Знак '=' не имеет онтологического измерения, он ничего не может сказать об отношениях объектов. Этот знак имеет лишь лингвистический, конвенциональный характер. Как утверждает Витгенштейн:

---

[1] Подробнее см. [28. С. 247–259].

> В жизни ведь нет никаких математических предложений, в которых мы бы нуждались, но математические предложения мы употребляем *только* для того, чтобы из предложений, не принадлежащих математике, выводить другие, равным образом не принадлежащих математике [4. 6.211].

Так, предваряя пример Рамсея, мы можем сказать, что из того, что у меня есть 2 + 2 шляпы, я могу вывести, что у меня 4 шляпы, при этом, конечно, данные пропозиции нужно представить в соответствующем виде, чтобы вторую можно было представить как результат преобразований первой. Но всё равно, ‘2 + 2 = 4’, в данном случае, есть лишь способ преобразования одного выражения в другое.

Как уже говорилось в § 3.2, Рамсей согласен с критикой Витгенштейна, более того, он её развивает в определённых аспектах и пытается, применяя соглашения Витгенштейна, реализовать в формальной системе, не использующей знака тождества, что достаточно затруднительно. Рассмотрению этой критики достаточно много места посвящено и в *OM*, как, впрочем, и недостаточности решения, предлагаемого Витгенштейном. Начнём с критики. Действительно, Рамсей, касаясь возможности различия вещей, имеющих все свойства общими, утверждает:

> Это вполне возможно, даже если фактически этого никогда не происходит. Возьмём две вещи *a* и *b*. Тогда, ничего самопротиворечивого нет ни в том, чтобы *a* обладало любым самонепротиворечивым множеством элементарных свойств, ни в том, чтобы этим множеством обладало *b*, ни, следовательно, в том, чтобы *a* и *b* имели эти свойства общими. Стало быть, поскольку это логически возможно, существенно иметь такой символизм, который позволял бы нам рассматривать эти возможности, а не исключать их посредством определения [17. С. 50−51].

То есть определение ***13.01** из *PM*, исключающее такую возможность, логически неоправдано. Аргументы, оправдывающие такую возможность, имеют содержательный, а не логический характер.

Пожалуй, единственный аргумент, который может сойти за логический, заключается в том, что уже именование объектов разными именами влечёт различие обозначаемых этими именами объектов. Кажущийся на первый взгляд логическим аргумент от необходимости различения объектов на том основании, что они обозначаются разными знаками, с точки зрения Рамсея, таковым не является:

> Бесполезно выдвигать возражения, что невозможно различить две вещи, у которых все свойства общие, поскольку дать им различные имена влекло бы, что обладание этими именами уже является различными свойствами. Ибо, хотя, так сказать, это и совершенно верно, что я не могу по указанной причине знать какие-то две отдельные неразличимые вещи, однако я вполне могу рассматривать такую возможность или даже знать, что есть две неразличимые вещи, не зная, что они собой представляют. Возьмём аналогичную ситуацию: поскольку людей на земле больше, чем волос на голове любого человека, постольку я знаю, что должны быть по крайней мере два человека с одним и тем же числом волос, но я не знаю, какие именно это люди [17. С. 51].

То есть я вполне могу использовать разные имена для вещей, обладающих одними и теми же свойствами, так как совершенно не обязательно знать, что это за вещи, поскольку я могу использовать и использую разные имена, и в этом нет никакого противоречия. Аргумент от различия вещей в силу различия их имён работает скорее в пользу точки зрения Витгенштейна, поскольку, используя выражение ‘$a = b$’, мы утверждаем, что используем разные обозначения одного и того же объекта, а не то, что разные объекты в каком-то смысле равны, так как, если они равны, нужно было бы использовать ‘$a = a$’, а если не равны, то нужно было бы использовать ‘$a \neq b$’.

Стало быть, если всё-таки возможно иметь символизм, не использующий знака тождества в смысле *PM*, а из аргументации Витгенштейна следует, что его можно и следует разработать, то его необходимо разработать, хотя бы для того, чтобы освободить логику от допущений, связанных в *PM* с определением ***13.01**. Но насколько это можно осуществить в соответствии с принципами *ЛФТ*? Следуя Витгенштейну, Рамсей утверждает:

> Когда и ‘a’, и ‘b’ являются именами, единственное значение, которое может быть придано ‘$a = b$’, состоит в том, что оно указывает на то, что мы используем ‘a’ и ‘b’ в качестве имён одной и той же вещи или, более обще, как эквивалентные символы [17. С. 34].

Но насколько оправдана такая интерпретация? Используя равенство, в этом случае мы указываем на уравнивание выражений, т.е. формулы вроде ‘$a = b$’ указывают на то, что ‘a’ и ‘b’ являются равными символами. С этим можно было бы согласиться, но, как считает Рамсей, хотя в этом есть определённое удобство, например, при рассмотрении ‘2 + 2 = 4’. Поскольку ‘У меня есть 2 + 2 шляпы’ и ‘У меня есть 4 шляпы’ являются одной и той же пропозицией, ‘2 + 2’ и ‘4’ являются равными символами. В таком виде это, очевидно, смехотворно узкий взгляд на математику и ограничивает её до простой арифметики… Я посвятил некоторое время развитию такой теории и нашёл, что она сталкивается с тем, что представляется мне непреодолимыми трудностями [17. С. 34] [1].

С чем здесь связаны непреодолимые затруднения, на которые указывает Рамсей? Согласно установкам Витгенштейна, так как в жизни нет никаких математических утверждений, выражения чистой математики служат для того, чтобы из утверждений эмпирической арифметики получать другие утверждения эмпирической арифметики, как в случае примера со шляпами. В этом случае выражения чистой математики являются в терминологии *ЛФТ* псевдопредложениями, которые ничего не говорят о действительности, но уравнивают используемые знаки. То есть уравнения математики служат для того, чтобы из одних утверждений, не относящихся к чистой математике, получать другие утверждения, столь же не относящиеся к чистой математике, за счёт подстановки одного из уравниваемых знаков вместо другого, поскольку «если два выражения связаны знаком равенства, то это означает, что они взаимозаменимы» [4, 6.23]. В случае примера со шляпами уравнение “2 + 2 = 4” так и работает. Можно предположить, что так работают и другие уравнения математики. Возьмём, например, выражение

$$x^2 - 3x + 2 = 0 : \supset_x : x = 2 \,.\vee.\, x = 1.$$

Оно может относиться к такой форме и говорить об уравниваемых знаках. В интерпретации Витгенштейна оно указывало бы на то, что ‘Если “ $x^2 - 3x + 2$” означает 0, то “x” означает 2 или 1’. Однако, как считает Рамсей,

математика была бы тогда, по крайней мере частично, деятельностью по конструированию формул, которые таким способом соответствуют вербальным пропозициям [17. С. 35].

[1] Интересно, что хотя Рамсей скептически относится к трактовке Витгенштейном математических утверждений как уравнений, относящихся к равенству знаков, он нигде эксплицитно не рассматривает другую важную идею *ЛФТ*, а именно, трактовку чисел, как показателей степени логических операций над предложениями. Было бы интересно сравнить эвристичность этой идеи для оснований математики с развиваемым Рамсеем в *ОМ* подходом к числу с помощью особых экстенсиональных функций.

Такую теорию трудно, а, может быть, и невозможно было бы развить в деталях. Но Рамсей считает, что её не просто можно, но и нужно отвергнуть по другим основаниям. В *OM* основные затруднения, связанные с таким подходим, относятся к использованию математических выражений в обычных утверждениях,

> они возникают, как только мы прекращаем трактовать математику как изолированную структуру и рассматриваем математические элементы в нематематических пропозициях [17. С. 35].

Такие выражения можно легко найти там, где математические отношения характеризуют отношения между предметами реального мира. Возьмём, например, высказывание "Число англичан, возведённое в квадрат, на два больше, чем число французов, возведённое в куб". Как формально проанализировать данное высказывание? Допустим, например, что пропозициональная функция $\phi\hat{x}$ истинна только для англичан, а пропозициональная функция $\psi\hat{x}$ истинна только для французов. Используя, пока для удобства обозначения, теорию классов из *PM*, можно было бы сказать, что эти функции соответственно определяют классы $\hat{x}(\phi x)$ и $\hat{x}(\psi x)$ как класс англичан и класс французов. Тогда число класса англичан можно определить с помощью выражения '$\hat{x}(\phi x) \in m$', а число класса французов как '$\hat{x}(\psi x) \in n$' (где 'm' и 'n' определяются как соответствующие числа, т.е., согласно определениям *PM*, как соответствующие классы подобных классов, а '$\in$' как отношение принадлежности элемента классу). В этом случае анализ высказывания "Число англичан, возведённое в квадрат, на два больше, чем число французов, возведённое в куб" привёл бы, согласно Рамсею, к выражению

$$(\exists\, m,n) \,.\, \hat{x}(\phi x) \in m \,.\, \hat{x}(\psi x) \in n \,.\, m^2 = n^3 + 2.$$

Вот здесь возникает вопрос, является ли эта пропозиция математической? Очевидно, нет, поскольку речь здесь идёт о реальных англичанах и французах. Кроме того, поскольку квантор существования, с учётом приведённых определений, является ничем иным, как логической операцией, проводимой с определяющими функциями $\phi\hat{x}$ и $\psi\hat{x}$, её результатом является согласование истинностных возможностей пропозиций, получающихся из этих функций заменой переменной на константы. Последние же являются эмпирическими пропозициями, значит, таковым является и результат применённой к ним операции. Всё указывает на то, что данное выражение является эмпирической, а не математической пропозицией. Но какую здесь роль тогда играет компонент ‘$m^2 = n^3 + 2$’? Если мы принимаем точку зрения Витгенштейна и рассматриваем компонент как лингвистический, т.е. относящийся только к способам выражения или, вернее, к способам уравнивания символов, тогда и всей пропозиции мы должны придать лингвистический смысл. То есть, согласно *ЛФТ*, математической псевдопропозиции $m^2 = n^3 + 2$ можно придать смысл, «только относя её к символам, делая тем самым всю пропозицию отчасти относящейся к символам» [17. С. 35]. Но, пожалуй, вряд ли можно согласиться, что высказывание “Число англичан, возведённое в квадрат, на два больше, чем число французов, возведённое в куб” является лишь символическим соглашением. Здесь мы действительно нечто утверждаем о мире, и на основании этого утверждения, кстати, можно было бы, например, делать выводы об этническом составе населения Европы, не считая, что пропорции, характеризующие такой состав, относятся лишь к нашим языковым конвенциям. Во всяком случае, вопрос “Каково число англичан?” вполне осмыслен, и если на это вопрос ответить, что “Число англичан, возведённое в квадрат, на два больше, чем число французов, возведённое в куб”, то этот ответ также вполне осмыслен, т.е. он нечто говорит о действительности, не являясь выражением простой языковой конвенции.

Нельзя сказать, чтобы Рамсей совершенно не соглашался с Витгенштейном в понимании математических выражений. Математические псевдопропозиции действительно отличаются от эмпирических. Как бы ни трактовались в этом случае логические и математические операции, для Рамсея

> ясно, однако, одно: математика не состоит из подлинных предложений или утверждений о фактах, которые могут быть основаны на индуктивной очевидности … но является в некотором смысле необходимой или тавтологичной [17. С. 28].

Уже касаясь приведённого выше примера, связанного со шляпами, в некотором смысле можно утверждать, что использование математических уравнений затрагивает только то, что с их помощью из одних выражений получаются другие выражения. Только, возможно, эти выражения имеют несколько иное значение, отличное от сугубо логических операций, преобразующих одно выражение в другое.

Посредством логических операций, скажем, таких как отрицание, можно, например, осуществить следующий вывод: «“У меня есть две шляпы”, следовательно, “Неверно, что у меня нет двух шляп”». В этом случае вывод сводится к установлению того, что истинностные значения посылки совпадают с истинностными значениями заключения. Так, в общем, и считает Витгенштейн, утверждающий, что предложения с одинаковыми истинностными значениями являются одной построенной с помощью разных логических операций пропозицией, т.е. выражения разные, но то, что выражается, является одним и тем же. Эквивалентные преобразования предложений с помощью логических операций оправдываются тем, что в *ЛФТ* называется тавтологиями. Так, вывод «“У меня есть две шляпы”, следовательно, “Неверно, что у меня нет двух шляп”» оправдывает тавтология “$p \supset {\sim}{\sim}p$”. Как пишет Витгенштейн: «Если, например, два предложения “p” и “q”, связанные как “$p \supset q$”, дают тавтологию, то ясно, что q следует из p» [4. 6.1221]. Особенностью тавтологий является то, что они для любых распределений истинностных значений принимают значение истина. Тавтологии вместе с противоречиями, т.е. пропозициями, принимающими значение ложь при любых распределениях истинностных значений у их компонент (ясно, что отрицание тавтологии даёт противоречие и наоборот), образуют то, что Витгенштейн называет предложениями логики. Особенностью логических предложений является то, что они ничего не говорят о действительности, «их истинность узнаётся из символа самого по себе» [4. 6.113]. Логические предложения характеризуют свойства знаковой системы, организуя предложения, которые нечто говорят о действительности и которые считаются подлинными предложениями. В отличие от последних, имеющих смысл именно потому, что они являются образами действительности, «в логике каждое предложение является формой доказательства» [4. 6.1264], т.е. формой связи одних осмысленных предложений с другими. Логика как наука есть теория, представляющая логические предложения в систематическом виде. Логическая теория в этом смысле является не более чем реестром форм доказательств, облегчающим распознавание тавтологий там, где они усложнены [4. 6.1262].

В качестве тавтологий, т.е. псевдопредложений, характеризующих свойства знаковой системы, можно попытаться истолковать и псевдопредложения математики. Если бы мы понимали математические уравнения по такому же типу, как тавтологии, то следовало бы математические операции уподобить логическим. Тогда вывод, использующий математические выражения, вполне соответствовал бы выводу, использующему логические операции. В этом случае и логические, и математические операции рассматриваются как способ построения разных форм описания одного и того же. С этим трудно не согласиться, поскольку аналогия вполне уместна. Выражения формы ‘2 + 2 = 4’ должны трактоваться как тавтологии, тогда

> ‘2 + 2 = 4’ само является не подлинной пропозицией, в пользу которого требуется опытная очевидность, но тавтологией, которую как тавтологию может видеть, кто способен полностью схватить её значение [17. С. 29].

Эти выражения были бы не просто уравнениями в смысле Витгенштейна, т.е. выражениями, на основании которых мы просто подставляем одни знаки вместо других, но выражениями, характеризующими те свойства знаковой системы, которые позволяют приводить в систематическую связь подлинные предложения, нечто говорящие о действительности. Точно так же, как и в случае с предложениями логики, выражения математики можно было бы представить в виде упорядоченной системы. Тогда математика представляла бы собой реестр форм доказательств, использующих специфические математические тавтологии. Функция математики как теории уподоблялась бы функции логики как теории, так как математика становится способом распознавания математических тавтологий, поскольку,

> когда в математике мы продвигаемся дальше, пропозиции становятся столь усложнёнными, что мы непосредственно не можем видеть, что они являются тавтологиями, и должны убедиться в этом, выводя их из более очевидных тавтологий. Исходные пропозиции, на которые мы в конченом счёте выпадаем, должны быть такими, что для них не нужно требовать никакой очевидности, поскольку они являются явными тавтологиями [17. С. 29].

Вместе с тем совершенно очевидно, что математические тавтологии чем-то должны отличаться от логических тавтологий. Как считает Рамсей,

> тавтологии, из которых состоит математика, вероятно, могут, в свою очередь, относиться к тавтологиям не витгенштейнианского типа, но какого-то другого [17. С. 29].

Но в любом случае их использование должно облегчать вывод, демонстрируя, что определённая связь одного выражения с другим, являясь тавтологией в таком смысле, позволяет получить первое выражение из другого. Связь предложений, как и в случае с логическими тавтологиями, показывала бы то, что связь предложений обеспечивается соотношением их истинностных значений. Рамсей утверждает:

> Возможно, что есть другие виды формул, которые могут использоваться, чтобы облегчить вывод; например, те, которые мы могли бы назвать тождествами типа ‘$a = b$’, обозначающими, что ‘a’ и ‘b’ могут быть подставлены вместо друг друга в любую пропозицию без её изменения. Я имею в виду не без изменения её истинности или ложности, но без изменения того, чем является пропозиция. В этом смысле ‘2 + 2 = 4’ вполне может быть тождеством, поскольку ‘У меня есть 2 + 2 шляпы’ и ‘У меня есть 4 шляпы’ являются одной и той же пропозицией, так как они согласуются и не согласуются с одним и тем же множеством предельных истинностных возможностей [17. С. 29–30].

Оставим пока в стороне детальное рассмотрение вопроса о том, как это можно было бы реализовать и как это действительно реализует Рамсей. Остановимся только на том, что понимание математических уравнений как тавтологий, во всяком случае, позволяет объяснить проблему того, как трактовать приведённое выше высказывание “Число англичан, возведённое в квадрат, на два больше, чем число французов, возведённое в куб”, не сводя его к реализации простой языковой конвенции, а рассматривая как утверждение, нечто проясняющее в рамках символической системы, связанное со структурой логического вывода, отражающего взаимосвязь истинностных значений пропозиций. Если математические псевдопропозиции уподобить предложениям логики, тогда в пропозиции

$$(\exists\, m,n)\,.\; \hat{x}\,(\phi x) \in m\,.\; \hat{x}\,(\psi x) \in n\,.\; m^2 = n^3 + 2$$

выражение ‘$m^2 = n^3 + 2$’ следовало бы считать тавтологией для тех значений m и n, которые её выполняют, и противоречием для всех других. Если мы это принимаем, то начинают работать простые логические соответствия. Допустим, что ‘$m^2 = n^3 + 2$’ – тавтология, тогда функция

$$\hat{x}\,(\phi x) \in m\,.\; \hat{x}\,(\psi x) \in n\,.\; m^2 = n^3 + 2$$

для таких значений m и n становится просто высказыванием

$$(\exists\, m,n)\,.\; \hat{x}\,(\phi x) \in m\,.\; \hat{x}\,(\psi x) \in n,$$

поскольку присоединение тавтологии оставляет истинностное значение пропозиции, построенной из данной функции, неизменным (т.к. присоединение тавтологии к любой пропозиции оставляет истинностное значение этой пропозиции неизменным), и, стало быть, выражение '$m^2 = n^3 + 2$' – излишне. Если же '$m^2 = n^3 + 2$' – противоречие, тогда

$$(\exists\, m,n)\,.\; \hat{x}\,(\phi x) \in m\,.\; \hat{x}\,(\psi x) \in n\,.\; m^2 = n^3 + 2$$

было бы самопротиворечивой пропозицией, поскольку любая конъюнкция, компонентом которой является противоречие, сама является противоречием. Таким образом, содержательно высказывание "Число англичан, возведённое в квадрат, на два больше, чем число французов, возведённое в куб" выражалось бы просто как

$$(\exists\, m,n)\,.\; \hat{x}\,(\phi x) \in m\,.\; \hat{x}\,(\psi x) \in n,$$

а добавление '$m^2 = n^3 + 2$' просто уточняло бы условия истинностной оценки данного высказывания, либо не изменяя его истинностного значения, либо делая его противоречивым при соответствующих значениях m и n. Таким образом, выражение '$m^2 = n^3 + 2$' характеризовало бы просто свойства логической системы, проявляя себя в качестве тавтологии в одном случае и в качестве противоречия – в другом. Как считает Рамсей, подобная трактовка математических тождеств избегает проблем, связанных с интерпретацией их как уравнений, принятых в *ЛФТ*, поскольку «затруднение, которое казалось фатальным для теории тождества, вообще избегается теорией тавтологий» [17. С. 38], если математическая псевдопропозиция трактуется как тавтология или противоречие, относящаяся только к возможности соответствующей истинностной оценки пропозиции, в которую она входит как компонент[1]. Таким образом, трактовка математических псевдопропозиций как тавтологий вполне возможна и да-

[1] Тавтологии и противоречия в качестве средства интерпретации тождества для улучшения способов перевода записи, использующей знак '=', в способ записи, не использующий таковой, Рамсей использует уже в черновиках к *ОМ*, представленных в составе его архивного наследия, пытаясь реализовать конвенцию Витгенштейна (см. § 3.2). Но только в *ОМ* сами выражения с тождеством начинают трактоваться как тавтологии и противоречия.

же, в некотором смысле, необходима, если нужно избежать крайностей их трактовки как просто языковых конвенций, предлагаемых Витгенштейном. И задача, которую ставит перед собой Рамсей, заключается в том, чтобы «решить, состоит ли математика из тавтологий (в точном смысле, определённом Витгенштейном) или формул некоторого другого сорта» [17. С. 30]. И хотя Рамсей считает, что вся математика состоит из тавтологий, для доказательства этого необходим детальный анализ, который позволил бы оправдать такие новые тавтологии именно как тавтологии. В приведённом примере анализа высказывания “Число англичан, возведённое в квадрат, на два больше, чем число французов, возведённое в куб” математическая тавтология, входящая в него как компонент, трактовалась с точки зрения классов. Но должна ли она истолковываться именно так? Трактовка m и n как классов равночисленных классов возвращает к критике, которой подверглась *PM* со стороны Витгенштейна. И здесь, если требуется сохранить классы, следует многое изменить не только в трактовке тавтологий, но и в трактовке самих классов.

Витгенштейн перевёл понимание знака ‘=’ на уровень языковой конвенции, но реализация такого подхода полностью невозможна, поскольку не все утверждения математики можно трактовать с позиций такой конвенции. Трактовка математических утверждений Рамсеем как тавтологий заставляет вновь вернуться к классам. Такой подход потребовал от Рамсея значительной модификации некоторых понятий из *PM*, в частности, понятия функции, определяющей класс, которую он заменяет понятием экстенсиональной функции (function in extension).

3.5. Рамсей об экстенсиональном характере математики

В предыдущем параграфе было показано, что то, что имеет в виду Рамсей под тождеством, не является знаком уравнивания выражений. Но тогда чем? Мотивация введения знака ‘=’ не сводится к уравниванию способов выражения, он должен оказаться чем-то другим, чем-то таким, на что указывают уравниваемые им выражения. Здесь как раз и возникает попытка истолковать идею Витгенштейна по-другому, т.е. истолковать тождество как согласование истинностных возможностей, интерпретировать выражения с тождеством не как уравнивание способов выражений, а как вариант специфических математических, но не логических тавтологий. Что должны представлять собой такие математические тавтологии, и чем они должны отличаться от логических тавтологий? Возражения Рамсея касаются, прежде всего, необходимости использования при формулировке математических тавтологий понятия класса, от которого отказывается Витгенштейн. Правда, при этом необходимо несколько иначе, чем в *PM*, истолковать классы.

Прежде, чем обратиться к трактовке классов Рамсеем, вернёмся к *PM* и рассмотрим особенности в характеристике классов. В *PM* класс всегда задаётся через некоторую определяющую его функцию, в частности, там утверждается:

> Мы требуем от классов, если предполагается, что они служат целям, для которых они используются, чтобы они обладали определёнными свойствами, перечисляемыми ниже. (1) Каждая пропозициональная функция должна определять класс, который может рассматриваться как собрание всех аргументов, удовлетворяющих этой функции. Этот принцип должен иметь место, когда функция удовлетворяется бесконечным числом аргументов и когда она удовлетворяется конечным числом аргументов… (2) Две пропозициональные функции, которые формально эквивалентны, т.е. такие, что любой аргумент, удовлетворяющий одной из них, удовлетворяет и другой, должны определить один и тот же класс… (3) Обратно, две пропозициональные функции, определяющие один и тот же класс, должны быть формально эквивалентными; другими словами, когда задан класс, его элементы детерминированы [39. Т. 1. С. 153].

С точки зрения этих характеристик пропозициональные функции первичны по отношению к классам. Более того, *PM* имеет дело только с такими классами, которые задаются через определяющие функции или с определимыми классами. Такой подход к классам как к тому, что задаётся определяющими функциями, мотивирован рядом соображений, смысл которых Рассел разъясняет в работе «Введение в математическую философию» [25. С. 77–78], о чём говорилось выше в § 1.4.3. Во-первых, интенсиональный подход к определению классов предпочтительнее экстенсионального. Под интенсиональным подходом здесь имеется в виду задание класса через определяющее его свойство, т.е. свойство, присущее всем элементам данного класса, а под экстенсиональным подходом – задание класса через перечисление элементов его объёма. Как считает Рассел, предпочтительность здесь заключается в том, что свойство всегда однозначно определяет класс, тогда как перечисление не всегда может быть полным в силу того, что мы можем и не знать все элементы данного класса. Во-вторых, некоторые классы просто нельзя задать экстенсионально. В частности, это касается бесконечных классов, которые в силу ограниченности нашей природы мы просто не можем задать перечислением. В-третьих, поскольку классы нам нужны для определения чисел, мы не можем воспользоваться экстенсиональным подходом, ввиду того, что классы классов, которыми являются числа, сами могут содержать бесконечное число элементов и, кроме того, сами образуют бесконечный класс. Следовательно, если необходимо определить число, используя понятие класса, то необходимы бесконечные классы, заданные через определяющие свойства. Логическим же эквивалентом определяющего свойства является определяющая класс пропозициональная функция. В некотором смысле Рассел считает, что понятие определяющего свойства, а, следовательно, определяющей функции, онтологически первично и интуитивно яснее, чем понятие класса. Другими словами, Рассел считает, что если нет какого-то свойства, задающего класс, то, собственно, нет и никакого класса. То же самое касается и определяющих функций. Общее понятия класса без понятия определяющей функции как логического эквивалента определяющего свойства имеет точно такое же значение.

С точки зрения приведённых выше соображений можно сказать, что исключительным предметом *PM* являются функции, а классы используются лишь как удобное упрощение. В этом случае классы нужны потому, что «в математическом рассуждении мы можем отбросить весь аппарат функций и думать лишь о классах как о “квазипредметах”» [39. Т. 1. С. 158]. При этом вопрос о действительном существовании классов не рассматривается, поскольку «классы … являются просто удобными символическими или лингвистическими конвенциями, а не подлинными объектами» [39. Т. 1. С. 148]. В *PM* такие символические конвенции называются неполными символами, которые задаются определениями и всегда могут быть удалены заменой определяемой части на определяющую. Класс здесь является производным от определяющих функций образованием, способствующим продвижению символики *PM* и не имеющим никакого собственного значения.

Таким образом, класс с точки зрения *PM* – это класс, заданный определяющей функцией, или определимый класс. Если таковой функции нет, то нет и никакого класса, который можно рассматривать в *PM*. Классы, конечно, важны, но речь о них может идти только в том случае, если есть задающая их определяющая функция. Если нет определяющей функции, то нет и никакого значимого класса. Фикции не могут возникнуть просто так, без того, что их производит.

Такой подход к классам совершенно не удовлетворяет Рамсея, и это он связывает с основной характеристикой современной математики, а именно экстенсиональностью. Разумеется, здесь экстенсиональность понимается существенно иначе, чем в *PM*, где последняя рассматривается как свойство формально эквивалентных определяющих функций, заменимых во всех контекстах, и где утверждается, что особенностью математики является то, что она ограничивается рассмотрением именно таких функций.

Рамсей имеет в виду совершенное иное:

> Называя математику экстенсиональной, мы подразумеваем, что она имеет дело не с предикатами, но с классами, не с отношениями в обычном смысле, но с возможными соответствиями или “отношениями по объёму” [17. С. 31].

Классы и отношения здесь понимаются сугубо экстенсионально, а не как то, что задаётся определяющими свойствами или функциями. Под классом Рамсей подразумевает «любое множество вещей одного и того же логического типа» [17, С. 31], причём это множество может быть абсолютно произвольным, т.е. его элементы не обязательно должны иметь одно и то же свойство, достаточно того, чтобы совпадал их тип. Такие классы могут быть конечными и задаваться простым перечислением. Но ничего не мешает им быть бесконечными. И хотя в этом случае они не могут быть заданы простым перечислением или рассматриваться как некоторый фиксированный объём предиката, на такие классы можно указывать косвенно, когда используются утверждения с кванторами относительно всех или некоторых классов, поскольку ссылка на все или некоторые классы в своей общности не должна исключать и такие бесконечные классы. Пример такому обращению с классами Рамсей видит в том, как в математике употребляется фундаментальное понятие действительного числа. Действительные числа определяются как любые сегменты рациональных чисел и при этом совершенно необязательно, чтобы такой сегмент определялся общим свойством его членов, поэтому «действительное число – это объём и даже, быть может, объём без соответствующего содержания» [17. С. 30]. Но это не мешает нам ссылаться на все или некоторые из этих сегментов, вне зависимости от того, являются они конечными или бесконечными.

То же самое касается и отношений, под которыми Рамсей подразумевает «не просто объёмы действительных отношений, но любое множество упорядоченных пар» [17. С. 30]. Можно друг с другом соотнести совершенно произвольные классы, т.е. поставить во взаимно однозначное соответствие их элементы, без того чтобы эти классы находились в каком-то действительном отношении. Так, например, поступает Г. Кантор при определении подобия классов, когда считает, что два класса подобны (или имеют одно и то же кардинальное число), когда их связывает одно-однозначное отношение. Очевидно, что при этом элементы классов могут быть произвольной природы, и не обязательно предполагать, что их связывает действительно отношение. Скажем, класс спутников Марса и класс афинских тираноубийц имеют одно кардинальное число, но вряд ли между ними есть какая-то содержательная связь. То же самое касается и возможности установления подобия бесконечных классов, которые, быть может, и не связаны содержательным отношением. Диагональный метод Кантора, например, позволяет установить подобие класса натуральных чисел и класса рациональных чисел без того, чтобы указывать на действительное отношение, связывающее их друг с другом. Указания на все или некоторые подобия (на все или некоторые отношения по объёму), использующие кванторы, не могут не учитывать таких бесконечных соответствий, поскольку, если утверждается, что все или некоторые подобия задаются через перечисление одно-однозначных соответствий элементов двух классов, то нет никаких оснований исключить из области действия кванторов бесконечные соответствия. Таким образом, как утверждает Рамсей, «математика существенно экстенсиональна и может быть названа исчислением объёмов, поскольку её пропозиции утверждают отношения между объёмами» [17. С. 33]. Смысл здесь, конечно, не в том, что Рамсей считает классы реально существующими, для него они также не являются подлинными объектами. Но эти неподлинные объекты не обязательно рассматривать как неполные символы, вводимые через некоторые действительные свойства. Даже если подобные квазипредметы задаются в *PM* через определяющие функции, разве нельзя их ввести по-другому? Как можно иначе задать эти неподлинные объекты? Что случилось бы, если бы не было способа задать такие неподлинные объекты способом, предложенным в *PM*? Более того, именно задание классов через определяющие функции Рамсей считает одним из фундаментальных недостатков *PM*. Приведём обширную, но очень важную цитату из *OM*:

> Теория *Principia Mathematica* состоит в том, что каждый класс или множество (я использую эти слова как синонимы) определяется пропозициональной функцией, т.е. состоит из тех значений x, для которых 'ϕx' истинно, где 'ϕx' – символ, выражающий пропозицию, если вместо x подставлен любой символ подходящего типа. Это равнозначно тому, чтобы сказать, что каждый класс имеет определённое свойство. Возьмём класс, состоящий из a и b; почему, можно спросить, должна существовать функция $\phi \hat{x}$, такая, что 'ϕa' и 'ϕb' являются истинными, а все другие 'ϕx'-ы – ложными? На это отвечают, задавая такую функцию, как '$x = a \,.\vee.\, x = b$'. Пренебрежём пока затруднениями, связанными с тождеством, и примем этот ответ. Он показывает нам, что любой конечный класс определяется пропозициональной функцией, сконструированной посредством тождества; но в отношении бесконечных классов он оставляет нас точно там, где мы и были, т.е. без всякой причины предполагать, что все они определены пропозициональными функциями, ибо невозможно записать бесконечный ряд тождеств. На это ответят, что класс может быть нам дан только либо через перечисление его членов, и в этом случае он должен быть конечным, либо заданием определяющей его пропозициональной функции. Поэтому мы не можем каким-либо способом иметь дело с бесконечными классами или множествами, если таковые есть, которые не определены пропозициональными функциями. (Для краткости я буду называть такие классы 'неопределяемыми классами'.) Но этот аргумент содержит общую ошибку, ибо он предполагает, что, поскольку мы не можем рассматривать вещи обособленно, мы вообще не можем иметь с ними дело. Таким образом, хотя на бесконечный неопределяемый класс нельзя сослаться сам по себе, он тем не менее включён в любое высказывание, начинающееся с 'Все классы' или 'Существует класс, такой, что', и если неопределяемые классы исключить, то значение всех таких высказываний будет фундаментально изменено [17. С. 39-40].

С точки зрения Рамсея, если в математике ограничиться определимыми классами, это нарушит её экстенсиональность и вместе с тем свойственную ей общность рассмотрения, поскольку тогда математика будет ограничена допущением, что все существующие (вернее, допущенные к рассмотрению) классы определимы. И действительно, если с бесконечным классом нельзя иметь дело обособленно, иначе, чем через определяющую его функцию, тогда неопределимые классы должны быть вынесены за рамки рассмотрения, что изменяет смысл выражений с кванторами, поскольку ‘Все классы’ или ‘Существует класс, такой что’ должны в этом случае подразумевать ‘Все определимые классы’ или ‘Существует определимый класс, такой что’. Однако, как утверждает Рамсей,

> существуют неопределяемые классы или же нет – это вопрос эмпирический; обе возможности мыслимы. Но даже если на самом деле все классы определимы, мы не можем в нашей логике отождествить классы с определяемыми классами, не нарушая априорности и необходимости, которые являются сущностью логики [17. С. 41].

То же самое относится к отношениям, которые в *PM* должны трактоваться как определимые отношения. Вернёмся, например, к рассмотренному выше понятию подобия у Г. Кантора. Устанавливая, что два класса имеют одно и то же кардинальное число, мы должны одно-однозначно соотнести их элементы, что подразумевает наличие функции, областью значения которой является один класс, а областью определения – другой класс. Но с точки зрения *PM* эта функция должна соответствовать некоторому определимому отношению, т.е. должно существовать некоторое действительное отношение, образующее пары из элементов этих классов. В противном случае они просто не могут быть соотнесены. Однако это явно расходится с тем, что под подобием понимал Кантор[1]. Как приводит остроумный пример Рамсей, мы могли бы соотнести ангелов-мужчин и ангелов-

[1] Так, например, Г. Кантор пишет: «Если два вполне определённых многообразия *M* и *N* можно однозначно и полно поэлементно сопоставить друг с другом (что всегда возможно и многими другими способами, если это сделано каким-либо одним), то далее удобно говорить, что эти многообразия имеют *равную мощность* или же что они эквивалентны… Когда рассматриваемые многообразия конечны, т.е. состоят из конечного числа элементов, то, как легко видеть, понятие мощности соответствует понятию *численности*, а следовательно, понятию *целого положительного числа*, так как у двух таких многообразий мощности равны именно тогда и только тогда, когда численность их элементов одинакова» [7. С. 22]. С соответствующим изменением терминологии, где многообразие означает класс, а численность или мощность – кардинальное число, нетрудно заметить, что речь здесь идёт не об определимых функциях, но вообще о любых возможных соотнесениях элементов одного произвольного класса с другим произвольным классом.

женщин, если таковые существуют, без того, чтобы между ними было какое-то действительное отношение вроде брака. Таким образом, «возможность неопределяемых классов и отношений по объёму – это сущностная часть экстенсиональной установки современной математики» [17. С. 42], и то, что это игнорируется в *PM*, является её существенным недостатком. Ошибка, с точки зрения Рамсея, заключается в том, что в *PM* задаются такие определения классов и отношений, которые применимы только к определимым классам и определимым отношениям. Но классы и отношения должны истолковываться так, чтобы утверждения об общности классов и отношений, охватывали бы и неопределимые классы и отношения, а, вернее, чтобы введение классов и отношений вообще не учитывало различие определимых и неопределимых классов и отношений. Есть произвольные классы и отношения, и столь же произвольными должны быть соответствующие им функции[1].

Надо сказать, что экстенсиональный подход к математике реализуется Рамсеем не только в отношении понятия определимых классов. Специфическая установка на рассмотрение функций как определяющих функций результируется в *PM* ещё и в такой крайне важной концепции, как разветвлённая теория типов, предназначенная для решения парадоксов (см. § 1.4.3). Простая теория типов Б. Рассела основана на строгом различении аргумента функции и самой функции с последующим запретом на использование функции в ка-

---

[1] В различении Рамсеем определяющих и произвольных функций М. Мэрион видит предвосхищение различия Л. Генкиным стандартной и нестандартной интерпретации кванторной логики более высоких, чем первый, порядков. Нестандартная и стандартная интерпретация связываются здесь с противопоставлением конструктивистского понимания функции, берущего начало с Л. Кронекера, общему понятию функции, введение которого обычно приписывается П. Дирихле и согласно которому «y называется функцией от x, если в рамках определённого интервала существует некоторое значение y для каждого значения переменной x, и при этом безразлично, зависит ли y от x согласно некоторому закону в рамках всего интервала и можно ли выразить эту зависимость посредством математической операции. Принятие понятия Дирихле подразумевает отказ от идеи функции, определяемой формулой, в пользу функций, ‘заданных посредством графика’, т.е. произвольных бесконечных подмножеств из $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$.» [67, P. 344]. Очевидно, что Рамсей придерживается стандартной интерпретации, которая использует понятие произвольной функции, поскольку, как думает Мэрион, «если принимаются только те бесконечные классы, которые определимы пропозициональными функциями – как в *Principia Mathematica* – интерпретация кванторов более высоких порядков будет изменена. Короче, Рамсей считал, что Уайтхед и Рассел ошибочно применили в *Principia Mathematica* то, что сводится к нестандартной интерпретации» [67. P. 346]. Отметим, что нестандартная интерпретация как раз и сводится к различным способам конструирования функции, задающим соответствующий класс, который в данном случае становится определимым классом.

честве собственного аргумента (так, например, в $\phi(x)$ на место аргумента x мы не можем поставить саму функцию $\phi\hat{x}$, поскольку выражение $\phi(\phi)$ является бессмысленным). Аргументом функции может выступать другая функция, но при этом она всегда должна относиться к типу, более низкому, чем та функция, аргументом которой она является, т.е. функции от индивидов, функции от функций индивидов, функции от функций функций индивидов и т.д. образуют различные общности, находящиеся в строгой иерархии. Разветвлённая теория типов учитывает, помимо того, различные способы построения функций, при этом различается то, какие общности функций используются при их построении. Так, если при построении функции не используются другие функции, то такая функция относится к первому порядку, но если при построении функции используется общность функций первого порядка, то такие функции относятся ко второму порядку и т.д.. Так, например, если выражение '$f(x)$' относится к функции первого порядка, то выражение '$(f) . \phi(f\hat{x}, y)$' относится к функции второго порядка, поскольку содержит указание на общность функций первого порядка, здесь связанная (или, в терминологии *PM*, кажущаяся) переменная пробегает по всем функциям первого порядка. Если же различие на порядки игнорируется и, скажем, допускается, что в '$(f) . \phi(f\hat{x}, y)$' кажущаяся переменная в качестве своего значения предполагает и саму функцию $\phi\hat{y}$, то это может привести к противоречиям. Поэтому в *PM* допускаются только такие функции, тип аргументов которых, вне зависимости от того, как они построены, должен быть всегда меньше, чем тип самой функции. Такие функции называются в *PM* предикативными. Разветвление функций на порядки приводит к ряду затруднений в практике математических рассуждений, что заставляет принять так называемую аксиому сводимости, которая вызвала множество возражений в связи с содержательным характером, не удовлетворяющим требованию необходимости математических утверждений.

Исходя из общей экстенсиональной установки, Рамсей отвергает такой подход (см. § 2.3). Действительно, необходимость разветвления функций на порядки возникает только тогда, когда мы предполагаем, что функция не произвольно задаёт класс или отношение, но в расчёт принимается способ её построения. Однако Рамсей проводит различие между способом построения определяющей функции и её объективным значением. В этом отношении способ построения функции зависит от ресурсов строящего её логика, но само объективное значение функции не меняется. Необходимость разветвления функции на порядки касается первого, но не второго. Решение вопроса в том, чтобы развести уровень выражения и уровень объективного значения функции. При этом, конечно, разветвление на порядки сохраняется, но оно относится уже не собственно к значению функции, а к ограничениям, накладываемым на выразительные возможности системы. На этой основе Рамсей модифицирует понятие предикативной функции, которое включает у него не только все функции, допустимые в *PM*, но и те функции, которые исключались разветвлённой теорией типов. Это возможно потому, что конструктивный (или, как его называет Рамсей, субъективный) подход к функциям заменяется реалистским подходом, ориентированным не на возможность построения, а на объективность значения. При этом объективность значения связывается с объективностью логики, которая не зависит от конструктивных способностей разрабатывающих её логиков. Это замечание важно в связи с тем, что все возможные значения функций, касающиеся как классов, так и отношений, установлены объективно, пусть даже мы и не можем подобрать соответствующих выражений.

Теперь, для того, чтобы позиция Рамсея стала окончательно ясной, суммируем относительно функций основные установки *PM* в том порядке, в котором они представлены выше: во-первых, все допустимые функции являются определяющими, т.е. они задают некоторое реальное свойство или некоторое реальное отношение, определяющее класс тех элементов или пар элементов, которые обладают этим свойством или находятся в этом отношении. Во-вторых, без таких функций некоторые классы задать просто невозможно, если предполагается бесконечное число элементов. В-третьих, построение таких функций должно учитывать конструктивные ресурсы строящего их логика.

Экстенсиональная установка Рамсея в отношении математики, основанная на критике *PM*, развивается в прямо противоположном направлении. Во-первых, функции должны зависеть от их объективного значения, а не от конструктивных возможностей выражающего их логика. Во-вторых, любые классы (в том числе и с произвольным количеством элементов) заданы объективно, вне зависимости от наличия какого-то реального свойства или отношения. В-третьих, даже если функция каким-то образом зависит от конкретного способа построения, то этот способ может быть заменён множеством других, а значит, он должен пониматься как абсолютно произвольный[1]. Характеристика экстенсиональной установки математики у Рамсея является, пожалуй, самой важной для понимания тех изменений, которые он предлагает внести в систему *PM*, чтобы сохранить теорию классов, которую Витгенштейн считает излишней [4, 6.031][2].

Теперь вернёмся к затруднениям, к которым приводит теория Витгенштейна и которые связаны с возражениями Рамсея относительно необходимости использования понятия класса, при надлежащей трактовке выражений, в которых математические утверждения нельзя истолковать иначе, как тавтологии, нечто показывающие относительно действительного мира. Рамсей утверждает:

> От затруднения с тождеством мы можем, ценой значительных неудобств, избавиться, применяя конвенцию Витгенштейна, которая позволяет нам удалить знак ‘=’ из любой пропозиции, в которой он встречается. Но это ставит нас в безнадёжное положение относительно классов, поскольку, избавляясь от ‘=’ вообще, мы больше не можем в определении конечных классов использовать $x = y$ как пропозициональную функцию. Поэтому единственные классы, с которыми мы теперь способны иметь дело, – это классы, определяемые предикативными функциями [17. С. 72][3].

[1] В некотором отношении это соответствует тому, как Г. Санду интерпретирует содержание *OM*, рассматривая его, как последовательное развитие Рамсеем понятия произвольной функции, которое проходит три стадии: «(*a*) критика определения понятия множества и функции в *PM*, которое не оправдывает экстенсиональную установку Канторовской теории множеств; (*b*) определение Рамсеем предикативной функции; (*c*) определение Рамсеем непредикативной функции, которое ведёт к полной экстенсионализации этого понятия» [86. P. 246].

[2] Как утверждает М. Мэрион: «Для Рамсея это – “безнадёжная позиция” как раз потому, что “математика является экстенсиональной”. В противоположность Витгенштейну, который в них не нуждался, Рамсею классы нужны, так сказать, даже больше, чем Расселу. Он хочет ввести непредикативные пропозициональные функции или, другими словами, бесконечные неопределяемые классы» [67. P. 356].

[3] Имеется в виду то, что, приняв теорию Витгенштейна, мы теперь можем иметь дело с классами с каким-то произвольным количеством элементов, но мы не можем определить, сколько их имеется точно. Классы, заданные определяющими функциями, остаются, но, поскольку мы отказываемся от тождества, точно определить количество элементов этих определимых классов становится невозможным. Отказываясь от знака ‘=’, мы, вместе с тем, отказываемся и от способа точного определения количества элементов класса, заданного любой определяющей функцией. Дело в том, что функцию, определяющую класс, в *PM* можно было заменить соответствующим выражением, использующим знак ‘=’, но если мы отказываемся от данного знака, то и подобные замены невозможны, и, значит, невозможны определения, вводящие классы с конкретным количеством элемен-

Предикативные функции как в *PM*, так и в модифицированном Рамсеем виде утверждают не более того, что ϕa предицирует a то же самое, что ϕb предицирует b. Но в этом случае, если из символической системы исключить знак '=', a и b нельзя ни отождествить, ни различить, поскольку, как вслед за Витгенштейном считает Рамсей, вещи могут быть согласованы в отношении всех предикативных функций, т.е. обладать одинаковыми свойствами, но тем не менее быть различными вещами. В этом случае математика не сможет рассматривать не только бесконечные неопределимые классы, которые, с точки зрения Рамсея, при экстенсиональной установке на математику просто необходимы, но нельзя будет рассматривать и перечислимые (т.е. конечные) классы, поскольку в отсутствие тождества и различия нельзя установить, какие именно элементы входят или не входят в тот или иной класс. Например, вполне мыслима такая ситуация, когда мир был бы таким, что все вещи распадались бы на трёхэлементные классы, где эти три элемента согласовывались бы

тов. Определяющая функция задаёт класс, но она не определяет, сколько элементов в данном классе, поскольку в нём может оказаться любое количество элементов. Допустим, что функция $\phi \hat{x}$ задёт класс разумных существ, но она не определяет сколько их. Далее, пусть функция $\psi \hat{x}$ задаёт класс существ, имеющих мягкую мочку уха, и она также не определяет их количества. Не используя знака '=' невозможно установить тождественность классов $\hat{x}(\phi x)$ (класс разумных существ) и $\hat{x}(\psi x)$ (класс существ, имеющих мягкую мочку уха). Мы можем только предполагать, что они совпадают. Но предположение не имеет никакого отношения к необходимости математических утверждений. Определяющие функции могут совпадать, но это совпадение не обязательно. Вот если бы мы могли бы соотнести входящие в эти классы элементы с помощью равенства, и это соотнесение оказалось бы однозначным, то такое соотнесение можно было бы принять. Но в отсутствие равенства – это невозможно. Тем более невозможно определить точное количество элементов, входящих в классы, поскольку такое соотнесение предполагает не только тождество, но и различие. Согласно определению равенства в *PM* (определение ***13.01**) с вытекающими из него последствиями для точного установления количества элементов класса,, который может быть задан различными функциями, не только одинаковые элементы должны быть тождественны, но и разные элементы должны быть различны. То есть классы задаются не только указанием на тождество, но и указанием на различие. Знак тождества используется в данном случае и в положительном, и в отрицательном смысле. Например, класс из двух элементов должен задаваться не только тем, что он является объединением классов двух предметов, которым равны все другие предметы (т.е. $\hat{y}(y = x) \cup \hat{z}(z = v)$), но и тем, что эти предметы не равны друг другу (т.е. $x \neq v$). Если определяющая функция и показывает, чем должны быть элементы соответствующего класса, она должна показывать, чем они быть не должны, но определяющие функции в *PM* этого не делают. Это можно сделать только с помощью '≠".

относительно всех свойств. Тогда, одноэлементные и двухэлементные классы просто невозможно было бы образовать, поскольку не было бы определяющего такие классы свойства или функции. Поскольку для Рамсея математика без возможности рассмотрения любых классов, а не только определяемых предикативными функциями становится “безнадёжной”, то

> если мы должны сохранить обычную форму математики, всё выглядит так, как если бы понятие пропозициональной функции необходимо было бы несколько расширить, с тем чтобы включить также и другие классы [17. С. 73].

То есть, исключив из символической системы знак ‘=’, мы не можем определить перечислимые классы с точным количеством элементов, не можем мы говорить и о бесконечных неопределяемых классах, что требуется экстенсиональностью математики. Таким образом, необходимо создать какое-то приспособление, целью которого было бы введение общего понятия класса, учитывающего все возможные классы, будут ли они определимыми или неопределимыми, конечными или бесконечными. Нужно произвольное понятие класса.

3.6. Экстенсиональные функции Рамсея

Рамсей предлагает расширить понятие функции и рассматривать не только предикативные функции в указанном выше смысле. В качестве такой, отличной от предикативных, функции он предлагает трактовать тождество, которое для различных предметов истолковывалось бы как противоречие, а для тождественных предметов – как тавтология. Для этого было бы достаточно рассматривать знак ‘=’, который, как следует из вышесказанного, сам не является выражением предикативной функции, как выражение, составленное из двух предикативных функций:

‘$x = y$’ создано из двух предикативных функций:

(1) Для $x \neq y$ за ‘$x = y$’ можно взять $(\exists\phi) \,.\, \phi x \,.\, {\sim}\phi x : (\exists\phi) \,.\, \phi y \,.\, {\sim}\phi y$, т.е. противоречие.

(2) Для $x = y$ за ‘$x = y$’ можно взять $(\phi) :. \phi x \,.\vee.\, {\sim}\phi x : \phi y \,.\vee.\, {\sim}\phi y$, т.е. тавтологию.

Но само ‘$x = y$’ не является предикативной функцией [17. С. 75–76].

То есть прямо в соответствии с определением ***13.01** из *PM* тождественные предметы должны выполнять одни и те же функции, а нетождественные – разные, поскольку, если предметы тождественны, то с точки зрения выполняемых ими функций мы всегда получим тавтологию, а в противном случае – противоречие. Вопрос только в том, как разговор о предметах можно перевести на разговор о функциях. Такое изменение позволило бы сохранить понятие класса, даже учитывая точку зрения Витгенштейна на тождество. Рамсей видит выход в экстенсионализации понятия функция, т.е. в приведении её в соответствие с практикой, которая принята в математике[1]. Он утверждает:

> Единственно осуществимый способ должен сделать это настолько радикально и решительно, насколько возможно; вообще исключить представление о том, что ϕa говорит об a то, что ϕb говорит о b; трактовать пропозициональные функции как функции математические, т.е. полностью их экстенсионализировать. В самом деле, ясно, что, поскольку математические функции производны от пропозициональных, мы получим адекватное экстенсиональное рассмотрение первых, только обретя совершенно экстенсиональный взгляд на последние [17. С. 75].

Экстенсиональный взгляд на функции как раз и позволяет получить то приспособление, с помощью которого произвольные классы становятся вполне респектабельными в математике. Помимо пропозициональных функций, Рамсей предлагает ввести ещё одну весьма специфическую функцию. Так, он пишет:

> В добавление к прежде определённому понятию предикативной функции, которое нам всё ещё потребуется для определённых целей, мы определяем, или скорее объясняем, ибо в нашей системе это должно приниматься как неопределяемое, новое понятие экстенсиональной пропозициональной функции [propositional function in extension]. Такая функция от одного индивида проистекает из некоего одно-многозначного отношения по объёму между пропозициями и индивидами; другими словами, из соответствия, осуществимого или неосуществимого, которое к каждому индивиду присоединяет особую пропозицию, индивид является аргументом функции, пропозиция – её значением.

[1] Г. Санду совершенно верно утверждает, что Рамсей «приходит к осознанию того, что если логицистская программа движется к достижению цели, нужно в логической системе иметь такое же понятие функции, как понятие, признаваемое за существующее в математике. Поскольку последнее является чисто экстенсиональным и произвольным, таковым должны быть и первое» [86, P. 250].

Так, ϕ(Сократ) может быть: Королева Анна умерла.

ϕ(Платон) может быть: Эйнштейн великий человек;

$\phi\hat{x}$ – это просто произвольно приписанные индивиду x пропозиции ϕx [17. С. 75].

То есть такая функция соотносит с произвольным индивидом произвольную пропозицию, поскольку экстенсиональный подход предполагает, что имеется список (быть может, бесконечный и, следовательно, не связанный с возможностями просматривающего этот список логика) индивидов и имеется список пропозиций (быть может, бесконечный и, следовательно, не связанный с возможностями просматривающего этот список логика), между которыми может быть установлено взаимно однозначное соответствие (быть может, бесконечное и, следовательно, не связанное с возможностями просматривающего этот список логика), и это соответствие может быть абсолютно произвольным, т.е. не предполагающим какого-то определяющего свойства.

Экстенсиональную функцию Рамсей записывает как $\phi_e\hat{x}$, используя нижний индекс e, и рассматривает общность таких функций как область определения переменной ϕ_e. Подобные функции позволяют вместо соотношений индивидов рассматривать соотношение пропозиций[1]. Действительно, если каждому индивиду соответствует пропозиция, то она может служить его адекватным представителем в любых возможных соответствиях, построенных с помощью произвольных функций. Значит, вместо соотношения индивидов можно рассмотреть соотношение соответствующих им пропозиций. В частности, так можно интерпретировать утверждение о тождестве индивидов.

Рассмотрим, например, выражение:

$(\phi_e) \,.\, \phi_e x \equiv \phi_e y$.

---

[1] $\phi_e x$ отличается от ϕx в той же степени, в которой экстенсиональные функции отличаются от предикативных. Сошлёмся здесь на М. Поттера: «Если fx является предикативной функцией, существует ясный смысл, в котором fa говорит об a то же самое, что fb говорит о b. Факт, который получается, если fa является истинным, имеет ту же самую структуру, как и факт, который получается, если fb является истинным. Единственное различие состоит в том, что второй факт имеет b там, где первый имеет a. Рамсей ввёл совершенно иной способ записи для различения классов пропозиций. *Пропозициональная экстенсиональная функция* – это запись $\phi_e x$ такая, что для любого имени 'a' соответствующего типа $\phi_e a$ выражает пропозицию, включающую a. Никаких требований, помимо того, чтобы $\phi_e a$ говорило об a то, что о b говорит $\phi_e b$, – нет» [73. P. 75–76].

Согласно приведённым определениям, это выражение утверждает, что для любой экстенсиональной функции ϕ_e пропозиция, соотнесённая с x, эквивалентна пропозиции, соотнесённой с y. Если для того, чтобы отличить одну экстенсиональную функцию от другой, снабдить их верхними индексами, то приведённое выражение можно представить в виде эквивалентного ему логического произведения следующей формы:

$$\phi_e{}^1x \equiv \phi_e{}^1y \;.\; \phi_e{}^2x \equiv \phi_e{}^2y \;.\; \phi_e{}^3x \equiv \phi_e{}^3y \;.\; \ldots$$

Тогда, если $x = y$ (т.е. если между x и y имеет место действительное тождество), то соотнесённые пропозиции всегда оказываются одними и теми же, а именно,

$$\begin{array}{lcl} \phi_e{}^1x : p & \text{и} & \phi_e{}^1y : p \\ \phi_e{}^2x : q & & \phi_e{}^2y : q \\ \phi_e{}^3x : r & & \phi_e{}^3y : r \\ \ldots & & \ldots \end{array}$$

Таким образом, выражение вида:

$$\phi_e{}^1x \equiv \phi_e{}^1y \;.\; \phi_e{}^2x \equiv \phi_e{}^2y \;.\; \phi_e{}^3x \equiv \phi_e{}^3y \;.\; \ldots$$

оказывается логическим произведением тождеств формы

$$p \equiv p \;.\; q \equiv q \;.\; r \equiv r \;.\; \ldots,$$

и, значит, является тавтологией, поскольку всегда принимает значение истина. Если же $x \neq y$, то для некоторой функции $\phi_e{}^n$ будет задано соотношение, сопоставляющее x с p, а y с $\sim p$. Следовательно, один из конъюнктов выражения

$$\phi_e{}^1x \equiv \phi_e{}^1y \;.\; \phi_e{}^2x \equiv \phi_e{}^2y \;.\; \phi_e{}^3x \equiv \phi_e{}^3y \;.\; \ldots$$

будет противоречием формы:

$$p \equiv \sim p,$$

и всё это выражение окажется самопротиворечивым. Таким образом, выражение

$$(\phi_e) \;.\; \phi_e x \equiv \phi_e y$$

является тавтологией, если $x = y$, и противоречием, если $x \neq y$.

Определенное так тождество является формальным эквивалентом определения тождества у Рассела[1]. Действительно, определение тождества через экстенсиональные функции:

$$x = y =_{def} : \ (\phi_e) \ . \ \phi_e x \equiv \phi_e y$$

является структурным аналогом определения тождества ***13.01** из *PM* :

$$x = y =_{def} : (\phi) : \phi!x \ . \supset . \ \phi!y,$$

но смысл этого определения совершенно иной. Экстенсиональные функции не являются определяющими функциями, они абсолютно произвольны. С помощью таких произвольных функций можно по-новому задать классы, которые будут уже не определимыми, но абсолютно произвольными классами:

> любой класс будет определяться с помощью экстенсиональной функции, *например*, посредством функции, которая является тавтологичной для какого-то члена класса аргументов, но противоречивой для какого-то другого аргумента, а нуль-класс будет определяться посредством самопротиворечивой функции. Поэтому совокупность классов может быть сведена к совокупности экстенсиональных функций, и, следовательно, она будет той совокупностью, которая требуется нам в математике, а не совокупностью предикативных функций, которые соответствуют не ‘всем классам’, но ‘всем предикатам’ или ‘всем свойствам’ [17. С. 77].

Таким образом, мы получаем удовлетворительную, сугубо экстенсиональную теорию классов. Экстенсиональные функции для введения классов нужны только на уровне индивидов, поскольку для введения классов, состоящих из классов, и далее для определения понятия кардинального числа достаточно предикативных функций, как их определяет Рамсей. Действительно, для введения классов, состоящих из классов, нам достаточно ввести функции от экстенсиональных функций, но все такие функции по определению будут

---

[1] Р. Фогелин утверждает: «Легко видеть, что все истинные высказывания о тождестве при таком определении будут оказываться тавтологиями. При каждом соотнесении индивиду (в независимости от того, наименован он или же нет) приписывается единственная пропозиция. Так, каждый элемент в логическом произведении, соответствующем $(\phi_e) \ . \ \phi_e x \equiv \phi_e y$, будет иметь форму “$p \equiv p$”. Таким образом, определение Рамсея отражает формальную структуру стандартного определения тождества» [55. P. 175]. Здесь отражение действительно имеет формальный характер, вернее структурное соответствие с определением ***13.01** из *PM*, поскольку речь у Рамсея идёт не о свойствах, но о пропозициях.

предикативными в смысле Рамсея. Более того, функции от экстенсиональных функций будут удовлетворять требованиям, которые предъявляются в *PM* к экстенсиональным контекстам. Напомним, что экстенсиональные функции в смысле *PM* определяются как функции, которые взаимозаменимы во всех контекстах, а именно, относительно свойства экстенсиональности функции f от функции $\phi ! \hat{z}$ имеет место следующее утверждение:

$$\phi ! x \,.\equiv_x.\, \psi ! x : \supset_{\phi, \psi} : f(\phi ! \hat{z}) \,.\equiv.\, f(\psi ! \hat{z}),$$

т.е. формально эквивалентные предикативные функции экстенсиональны, если они выполняются для одних и тех же аргументов во всех контекстах [39. Т. 1. С. 266]. Но то же самое имеет место для специфических функций Рамсея, т.е. имеет место следующее утверждение:

$$\phi_e\, x \,.\equiv_x.\, \psi_e\, x : \supset_{\phi e, \psi e} : f(\phi_e\, \hat{z}) \,.\equiv.\, f(\psi_e\, \hat{z}).$$

А это очень важно, поскольку именно экстенсиональные контексты в *PM* обеспечивают возможность введения классов, так как функции, фигурирующие в таких контекстах, рассматриваются как то, что определяет класс. Но так как экстенсиональные функции Рамсея выполняют условия экстенсиональных контекстов из *PM*, то всё, что говорится в *PM* о классах, может быть *mutatis mutandis* перенесено в систему Рамсея. Таким образом, теория классов Рамсея формально эквивалентна теории классов из *PM*, но имеет совершенно другой смысл. Как пишет Рамсей,

> чтобы получить полную теорию классов, мы должны принять, что область функций от индивидов является областью экстенсиональных функций; но область функций от функций является областью предикативных функций. Используя эти переменные, мы получаем систему *Principia Mathematica*, упрощённую тем, что опущена аксиома сводимости и несколько соответствующих изменений. Формально она почти не изменилась; но её смысл значительно переменился. И в таком сохранении формы при модификации интерпретации я следую великой школе математических логиков, которые посредством ряда поразительных определений охранили математику от скептиков и обеспечили твёрдое доказательство её пропозиций. Только так мы можем предохранить её от большевистской угрозы со стороны Брауэра и Вейля [17. С. 80].

Таким образом, теория классов, которую Витгенштейн считает излишней, а Рамсей – необходимой, в математике всё-таки возможна. Для этого, как показывает Рамсей, достаточно экстенсионализировать понятие функции, что позволяет в модифицированном виде ввести в символическую систему те особенности, для которых в *PM* применялся знак ‘=’, от которого отказывается Витгенштейн, принимая дополнительное символическое соглашение о том, что разные предметы должны обозначаться разными знаками, а один предмет должен обозначаться одним и тем же знаком [4. 5.53]. Но как к новациям Рамсея отнёсся Витгенштейн? Его критическая позиция была направлена на то, что экстенсиональные функции Рамсея являются в символической системе столь же бессмысленными, как и знак тождества. Критика Витгенштейна и ответ на неё Рамсея позволяют прояснить позицию последнего.

3.7. Витгенштейн об экстенсиональных функциях Рамсея

С идеей экстенсиональных функций (function in extension) Витгенштейн ознакомился через М. Шлика, который передал ему статью Ф.П. Рамсея *OM* и попросил высказать своё мнение. Витгенштейн выразил своё несогласие и через Шлика передал письмо Рамсею со своими возражениями, ответ на которые хотел бы узнать и сам М. Шлик. Критические замечания Л. Витгенштейна, представленные в этом письме, состоят из двух частей и касаются двух аспектов *OM*. Во-первых, Витгенштейн критически анализирует понятие экстенсиональной функции, предложенное Рамсеем, и скептически относится к тому, что $(\phi_e) \, . \, \phi_e x \equiv \phi_e y$ можно рассматривать в качестве замены $x = y$. Во-вторых, он критически относится к использованию экстенсиональных функций в контекстах существования.

В целом, и то, и другое направлено на критику того, как с помощью экстенсиональных функций Рамсей пытается сохранить из *PM* то, что Витгенштейн считал бессмысленным и что связано с функционированием знака тождества. Второй аспект критики связан с первым и существенно зависит от того, как Витгенштейн понимает экстенсиональные функции Рамсея в качестве замены знака тождества. Кроме того, этот второй аспект в большей степени связан с возможностью логически решить вопрос о количестве вещей в мире, вплоть до проблем с аксиомой бесконечности из *PM*. К этой части критики Витгенштейна и связанным с ней проблемам мы обратимся позже, а здесь, поскольку нас интересует именно проблема тождества, пока остановимся на критике Витгенштейном понятия экстенсиональных функций у Рамсея и возможности заменить ими понятие тождества. Это важно в связи с тем, что критика Витгенштейна и ответ на неё Рамсея позволят лучше понять, что имеется в виду в *OM*, а это, в свою очередь, позволит адекватно рассмотреть и остальную критику. Ввиду важности приведём обширную цитату из письма Витгенштейна от 02.07.1927, касающуюся этого первого аспекта. Обращаясь к Рамсею, он пишет:

> Вы определяете $x = y$ как
>
> $(\phi_e) \,.\, \phi_e x \equiv \phi_e y$ ………… $Q(x, y)$
>
> и Вы оправдываете это Определение, утверждая, что $Q(x, y)$ является тавтологией всегда, когда “*x*” и “*y*” имеют одно и то же значение, и противоречием, когда они имеют разные значения. [*Здесь и далее Q(x, y) есть сокращение для* $(\phi_e) \,.\, \phi_e x \equiv \phi_e y$ *–* ***В.С.***]
>
> Я попытаюсь показать, что это определение не выполняет того, для чего оно предназначено, пытаясь сделать $x = y$ тавтологией или противоречием.
>
> Ясно, что $Q(x, y)$ является логическим произведением. Пусть “*a*” и “*b*” будут двумя именами, имеющими различные значения. Тогда, среди членов нашего произведения, будут такие, что $f(a)$ означает p, а $f(b)$ означает $\sim p$. Назовём такую функцию критической функцией f_k. Теперь, хотя мы знаем, что “*a*” и “*b*” имеют разные значения, сказать, что $a = b$, всё равно не может быть бессмысленным, если $a \neq b$ должно иметь какой-то смысл. Ибо, если $a = b$ было бы бессмысленным, то отрицательная пропозиция (т.е. отрицание того, что они имеют одно и то же значение) также была бы бессмысленной, ***ибо отрицание бессмыслицы также является бессмыслицей***. Теперь ошибочно предположим, что $a = b$, тогда, посредством подстановки *a* вместо *b*, что должно быть вполне законным, если мы придали $a = b$ правильное значение, в нашем логическом произведении критическая функция $f_k(a)$ становится бессмысленной (будучи двусмысленной), а, следовательно, и всё произведение. С другой стороны, пусть “*c*” и “*d*” будут двумя именами, имеющими одно и то же значение, тогда истинно то, что $Q(c, d)$ становится тавтологией. Но предположим теперь (ошибочно) $c \neq d$, $Q(c, d)$ всё ещё остаётся тавтологией, ибо в нашем произведении отсутствует критическая функция. И даже если (чего сделать нельзя) можно было бы предположить, что $c \neq d$, существования критической функции f_k (такой, что $f_k(c)$ означает

p, а $f_k(d)$ означает $\sim p$) предположить, конечно, нельзя, ибо знак $f_k()$ становится в этом случае бессмысленным. Следовательно, если $x = y$ является тавтологией или противоречием и корректно определяется посредством $Q(x, y)$, то $Q(a, b)$ было бы не противоречивым, а бессмысленным (поскольку это предположение, если оно является предположением, что “a” и “b” имеют одно и то же значение, делало бы критическую функцию бессмысленной). И следовательно, $\sim Q(a, b)$ также было бы бессмысленным, ибо отрицание бессмыслицы есть бессмыслица.

В случае c и d, $Q(c, d)$ остаётся тавтологией, даже если можно предположить, что c и d являются различными (ибо в этом случае нельзя даже предположить существования критической функции).

Мой вывод: $Q(x, y)$ является весьма интересной функцией, но она не может быть подставлена вместо $x = y$ [81. P. 339–340].

Что здесь имеется в виду? Во-первых, Витгенштейн рассматривает выражение

$$(\phi_e) \,.\, \phi_e x \equiv \phi_e y,$$

записывая его в дальнейшем как $Q(x, y)$, в качестве определения ‘$x = y$’. Это утверждает и сам Рамсей, поскольку считает, что его «можно взять как определение $x = y$» [17. С. 77]. При этом $Q(x, y)$ – тавтология, если “x” и “y” имеют одинаковые значения, и противоречие – в противном случае. Во-вторых, Витгенштейн пытается показать, что если принять $Q(x, y)$ как замену $x = y$, то это всё равно не сделает $x = y$ ни тавтологией, ни противоречием. С первым нельзя не согласиться, поскольку это имеет текстуальное подтверждение у Рамсея. Но насколько адекватно второе? Рассмотрим несколько подробнее аргументацию в пользу второго утверждения.

В пользу второго утверждения Витгенштейн рассматривает два случая: во-первых, два имени имеют разное значение; во-вторых, два имени имеют одинаковое значение. Рассмотрим первый случай. Аргументация здесь сводится к следующим шагам:

1. Пусть имена “a” и “b” имеют различные значения, т.е. $a \neq b$, тогда среди общности экстенсиональных функций ϕ_e, как их понимает Рамсей, согласно определению, найдётся такая функция f, которая с a сопоставляет p, а с b сопоставляет $\sim p$ (такую функцию Витгенштейн называет критической и обозначает f_k, т.е. $f_k(a)$ означает p, $f_k(b)$ означает $\sim p$).

2. Предположим, однако, пусть и ошибочно, что $a = b$. Несмотря на то, что это предположение ошибочно, оно всё-таки не бессмысленно, поскольку если бы оно было бессмысленным, то бессмысленным было бы и его отрицание, т.е. $a \neq b$. Но если мы считаем выражение $a \neq b$ осмысленным, то осмысленным должно быть и его отрицание, т.е. $a = b$.

3. Теперь, если мы ошибочно предполагаем, что $a = b$, то критическая функция f_k становится бессмысленной, поскольку, с одной стороны, $f_k(a)$ должно обозначать p, а, с другой стороны, так как, следуя ошибочному предположению, мы можем заменить “b” на “a”, $f_k(a)$ должно обозначать $\sim p$. А этого не может быть в силу определения экстенсиональных функций.

4. Но тогда, поскольку критическая функция является бессмысленной, бессмысленной становится и вся общность экстенсиональных функций, поскольку, если один из членов логического произведения бессмыслен, то бессмысленно и всё логическое произведение. Таким образом, ошибочное предположение $a = b$ делает бессмысленным выражение $Q(a, b)$, а вместе с тем и выражение $\sim Q(a, b)$, поскольку отрицание бессмыслицы есть бессмыслица. Значит, и всё выражение $Q(x, y)$ является не тавтологией или противоречием, но бессмыслицей.

Стало быть, осмысленное, пусть и ошибочное, предположение, что $a = b$, приводит к бессмысленным следствиям.

Второй случай ещё интереснее:

1. Пусть имена “c” и “d” имеют одинаковое значение, т.е. $c = d$. Тогда, в силу определения экстенсиональных функций, $Q(c, d)$ является тавтологией.

2. Предположим, что $c \neq d$. Это возможно, поскольку, если $c = d$ осмысленно, должно быть осмысленно и его отрицание, т.е. $c \neq d$.

3. Но предполагая 2), мы должны также предполагать, что существует критическая функция f_k, такая, что $f_k(c)$ означает p, а $f_k(d)$ означает $\sim p$. Но таковой функции быть не может, поскольку даже при нашем ошибочном предположении, что $c \neq d$, $Q(c, d)$ всё равно остаётся тавтологией, т.е. соответствующей критической функции просто не существует.

4. То есть $c \neq d$ невозможно и даже лишено смысла ввиду отсутствия f_k. Значит, невозможно и даже лишено смысла $c = d$.

Таким образом, получается, что ни при различии объектов, ни при их отождествлении критическая функция f_k не работает, поскольку в первом случае она становится бессмысленной, а во втором случае она становится, по крайней мере, излишней, поскольку лишена смысла в силу её невозможности. Значит, не работают и экстенсиональные функции в смысле Рамсея, так как критическая функция, как её понимает Витгенштейн, является их составной частью. Попытки представить $Q(x, y)$ в качестве замены $x = y$ представляются Витгенштейну абсолютно неоправданными ни в случае $x = y$, ни в случае $x \neq y$. Возможность функции f_k для первого и второго случая здесь становится главным критерием. Вопрос для Витгенштейна заключается, собственно, в том, может ли $Q(x, y)$ заменить утверждения о возможном тождестве x и y.

Здесь следует отметить, что подобный критический подход к экстенсиональным функциям Рамсея Витгенштейн, по-видимому, развивает непосредственно в духе своей критики концепции тождества, представленной им в *ЛФТ*, а именно:

> Сказать о двух предметах, что они тождественны, бессмысленно, а сказать об *одном* предмете, что он тождествен самому себе, значит ничего не сказать [4, 5.5303].

В случае критических функций получается то же самое. Действительно, в случае нетождественности предметов, критическая функция становится бессмысленной, а в случае тождественности – невозможной. И здесь вся аргументация Витгенштейна сводится к тому, что, если тождество бессмысленно, бессмысленны и все возможные способы его выражения. Применение приспособлений, предназначенных для выражения тождественности или нетождественности предметов, всегда приведёт к тому же самому результату, поскольку попытка выразить бессмыслицу всегда приведёт к бессмыслице. Приспособления, с помощью которых пытаются выразить бессмыслицу, сами являются бессмысленными, поэтому и использование выражения ‘$Q(x, y)$’ для замены выражения ‘$x = y$’ столь же бессмысленно, как и использование самого выражения ‘$x = y$’[1].

---

[1] Аргументация Витгенштейна станет яснее, если учесть, как он понимает специфику предполагаемого тождества или различия a и b. В интерпретации Витгенштейна у Рамсея различие устанавливается не за счет различия некоторых действительных свойств обозначаемых объектов, речь идёт о возможности различия объектов с помощью критической функции. Вопрос заключается, собственно, в том, можем ли мы использовать критическую функцию для отождествления и различия объектов точно так же, как в *PM* использовались знаки тождества и различия объектов. О том, что эти ситуации разные, рассматривая первый случай, пишет П. Саливэн: «Чтобы яснее видеть, как разворачивается аргументация, мы начнём с рассмотрения иной модели, где a и b различаются посредством

некоторого свойства G. Примем как данное, что Ga и $\sim Gb$. Поскольку я ошибочно уверен, что $a = b$, я не могу верить в оба эти факта; но я вполне могу знать один из них, скажем, что Ga. Будучи уверенным, что a есть b, мне безразлично, что предполагать истинным относительно a и b. Я буду принимать, что 'Ga' и 'Gb' представляют один и тот же факт. Поэтому, зная, что 'Ga', я буду принимать, что 'Gb'. Я, разумеется, буду ошибаться, но здесь нет места для сомнения относительно природы моей ошибки. Она ясна, поскольку моё понимание свойства G никак не подорвано моим приписыванием этого свойства чему-то такому, что фактически им не обладает. Теперь противопоставим случай Витгенштейна. Снова задано, что a и b различны, что $f_k a$ есть p, $f_k b$ есть $\sim p$; и что я не знаю, что a отлично от b, и, следовательно, не знаю, что $\sim . f_k a \equiv f_k b$. Я ошибочно предполагаю, что $a = b$. Поэтому опять-таки мне безразлично, предполагать ли истинность пропозиции $f_k a$ или истинность пропозиции $f_k b$, поскольку они для меня являются одной и той же пропозицией. Но какой пропозицией они являются для меня? Предполагаю ли я, ошибочно, что $f_k b$ есть пропозиция, что p, или же я предполагаю, что $f_k a$ есть пропозиция, что $\sim p$? Или же зададим вопрос другим способом, если кто-то, кому я доверяю, уверяет меня в истинности $f_k a$, должен ли я прийти к уверенности, что p, или я должен прийти к уверенности, что $\sim p$? Если бы f_k была предикатом, на этот вопрос был бы готов ответ посредством апелляции к моему пониманию этого предиката: является ли его значением то, что утверждается об x, т.е. $p(x)$ или $\sim p(x)$? f_k, разумеется, не имеет значения такого вида; мы "вообще отбросили" представление, что пропозиция $f_k x$ нечто постоянное относительно x. Даже если этот вопрос имеет ответ, он должен проистекать из моего понимания значения 'f_k', из моего знания, для какой пропозиции эта функция применяется к отдельным аргументам. Но теперь мы видим, что это знание не может преодолеть мою ошибку относительно тождества её аргументов. Я не могу постичь f_k иначе как функцию, которая даёт противоречивые пропозиции для аргументов a и b. Поэтому, предполагая, что a есть b, я вообще не могу понять f_k.» [87. P. 139]. Аргументация Витгенштейна в интерпретации Саливэна вполне понятна, если мы основываемся на попытке заменить функцией $Q(x, y)$ тождество и различие объектов. Первый аргумент Витгенштейна прямо говорит, что такая попытка невозможна. Более того, при всём различии того, как работают экстенсиональные функции и тождество, мы приходим к одному и тому же результату, а именно, к бессмысленности выражения тождества объектов через тождество свойств, как бы эти свойства ни понимались. Тот же самый вывод касается и второго аргумента. Здесь опять необходимо учитывать характер различия и тождества обозначаемых объектов. Как пишет Саливэн: «Пусть "c" и "d" имеют одинаковое значение, так что $Q(c, d)$ становится тавтологией Рамсея; каждая экстенсиональная функция отображает c и d в одну и ту же пропозицию, и не существует "критической функции" f_k, для которой $f_k c$ есть p, а $f_k d$ есть $\sim p$. Теперь, если $Q(c, d)$ является тавтологией, то она должна иметь противоречащее выражение, выражение, которое предполагается тем, кто предполагает, что $c \neq d$. Чем может быть это предположение? Принимая комплексность выражения Рамсея '$\forall \phi_e . \phi_e c \equiv \phi_e d$' за подлинное, необходимо предполагать и '$\exists \phi_e . \sim . \phi_e c \equiv \phi_e d$', предполагать, что существует некоторая критическая функция f_k, которая различает c и d. Опять-таки что представляет собой это предположение? Оно может быть предположением, что c имеет некоторое свойство, которого не имеет d, ибо, хотя этого было бы достаточно для '$\exists \phi_e . \sim . \phi_e c \equiv \phi_e d$', это не является необходимым. По моему предположению, эта критическая функция должна быть функцией, которую я понимаю через её экстенсиональность, понимаю как функцию, которая задаётся тождественностью своих аргументов и значений. То есть я должен непосредственно понимать корреляцию f_k такую, что f_k, относит c $(=d)$ к p, а d $(=c)$ к $\sim p$. Но ясно, что существование такой критической функции даже невозможно предположить» [87. P. 138]. Подобного рода критика разрушает эвристическую ценность экстенсиональных функций Рамсея, но только в том случае, если мы принимаем, что функция $Q(x, y)$ действительно выражает именно

Таким образом, оказывается, что, принимая возможность использования функции $Q(x, y)$ вместо тождества, Витгенштейн считает, что она не может служить адекватной заменой выражений вроде '$x = y$', или выражений вроде '$x \neq y$'. То есть экстенсиональные функции, хотя и допустимы, не могут быть использованы в качестве адекватной замены знака тождества, поскольку, принимая их в качестве таковых, мы приходим к бессмыслице. Но возникает вопрос, имел ли в виду Рамсей то, что имеет в виду Витгенштейн? Имел ли он в виду, что $Q(x, y)$ выражают тот же самый смысл, что и выражения с тождеством? Можно ли сказать, что экстенсиональные функции Рамсея предназначены для того, чтобы выразить идею *PM* о тождественности и различии объектов в полном соответствии с тем, как согласно смыслу определения тождества неразличимых Лейбница, нам необходимо принять утверждение ***13.01** из *PM*:

$$x = y =_{def} : (\phi) : \phi!x . \supset . \phi!y,$$

т.е. x и y тождественны, когда они удовлетворяют одним и тем же свойствам, и используется ли функция $Q(x, y)$ в этом же самом смысле?

Предварительно Рамсей отвечает на этот вопрос в письме к М. Шлику в ответ на письмо, в котором были пересланы возражения Витгенштейна. В этом письме от 22.07.27. относительно критики Витгенштейна Рамсей пишет Шлику следующее:

> Он, по-видимому, принимает мою точку зрения, что $Q(x, y)$ является тавтологией, когда "x" и "y" являются именами одной и той же вещи, и противоречием в противном случае, но тем не менее доказывает, что $Q(x, y)$ не может говорить, что x и y являются тождественными; поскольку, если, например, x и y являются различными и кто-то *per impossible* может предположить их тождественность, это не было тем же самым, как предположение $Q(x, y)$. С этим я полностью согласен, но мне всё равно кажется, что $Q(x, y)$ является

тот смысл, который в *PM* выражается с помощью знака тождественности объектов. Так, например, Саливэн, с точки зрения приведённой выше критики, прямо в соответствии с афоризмом 5.5303 из *ЛФТ* утверждает, что критика Витгенштейна обессмысливает экстенсиональыне функции Рамсея. Невозможность критической функции ни в случае, когда $a = b$, ни в случае, когда $a \neq b$, делает введение функции вроде $Q(x, y)$ бессмысленной, а, значит, бессмысленными становятся и все построения Рамсея, касающиеся этой функции. Выводы Саливэна вполне обоснованы, если $Q(x, y)$ понимается как содержательная замена тождества объектов, но $Q(x, y)$ не выражает тождества и различия x и y, роль данной функции, как утверждает Рамсей, совершенно иная.

адекватной подстановкой вместо $x = y$ как элемента логической записи. Мы всегда используем $x = y$ как часть обобщённой пропозициональной функции, и в каждом таком случае мы получим правильный смысл для результирующей общей пропозиции, если вместо этого мы подставим $Q(x, y)$ [91. P.191].

Таким образом, Рамсей согласен с тем, что Витгенштейн правильно понимает характер его экстенсиональных функций вроде $Q(x, y)$, как функций, выполняющих роль тавтологий и противоречий. Но вместе с тем Рамсей считает, что Витгенштейн неправильно понимает то, для чего эти функции предназначены. Действительно, если бы экстенсиональные функции вида $Q(x, y)$ пытались бы сказать то же самое, что и выражения вроде '$x = y$' или '$x \neq y$', то критика Витгенштейна была бы вполне оправдана. Но главное в том, что Рамсей никогда и не предполагал заменить содержательный смысл тождества экстенсиональными функциями. В том же письме он пишет следующее:

На самом деле я никогда не думал предполагать, что $Q(x, y)$ является способом говорить, что x и y являются тождественными. Я представлял, что Витгенштейн показал, что сказать нечто подобное невозможно. Я лишь предложил $Q(x, y)$ как замену для символа $x = y$, используемого в общих пропозициях и в определении классов [91. P. 191].

Функции $Q(x, y)$ предназначаются Рамсеем лишь как символическое приспособление для того, чтобы заменить выражения, вроде '$x = y$' и '$x \neq y$', там, где они встречаются в *PM*, но эти функции ничего не говорят о тождественности предметов. Да и в свете того, что Рамсей принимает критику Витгенштейном концепции тождества, это вряд ли было бы возможно предположить. Суть предложений Рамсея заключаются в том, чтобы сохранить экстенсиональность математики и, вместе с тем, теорию классов с помощью символического соглашения, иного, чем соглашение, принимаемое Витгенштейном. Это соглашение должно основываться на новом понятии математической тавтологии, предложенном Рамсеем.

На возражения Витгенштейна Рамсей ответил не только в письме к М. Шлику. Интересными в этом отношении являются черновики писем Рамсея к Витгенштейну, в которых он даёт на его вопросы более развёрнутый ответ[1]. В одном из черновиков писем Рамсей пишет:

[1] Познакомившись с возражениями Витгенштейна, Рамсей написал письмо Шлику. Но это был не единственный ответ. В архивном наследии Рамсея имеются два черновика

Я не уверен, понял ли я вообще вашу аргументацию, но, насколько я могу видеть, ваша позиция заключается в следующем. Я говорил, что $Q(x, y)$ $\{(\phi_e) \,.\, \phi_e x \equiv \phi_e y\}$ является тавтологией, когда "x" и "y"имеют одно и то же значение, и противоречием, когда они имеют разные значения. Это, я полагаю, вы не отрицаете (или отрицаете?), но вы говорите, что ошибочно делать вывод, что $Q(x, y)$ работает как определение $x = y$. Вы показываете, что $Q(x, y)$ не говорит, что x и y являются тождественными, чего я никогда и не думал делать. Всё, что мне хотелось бы утверждать, заключается в том, что, когда $x = y$ встречается в записи Рассела как часть некоторой обобщённой функции, мы получаем правильное значение, подставляя $Q(x, y)$ вместо $x = y$ [81. P. 342].

Разъясняется это посредством примеров, которые используются в *OM*. Здесь Рамсей показывает, что действительно должны подразумевать его экстенсиональные функции:

Так $(\exists x) : fx \,.\, x \neq a$ подразумевает то, что обозначается посредством $(\exists x) : fx \,.\, {\sim}Q(x, a)$, а $(\exists\, m,n) \,.\, \hat{x}\,(\phi x) \in m \,.\, \hat{x}\,(\psi x) \in n \,.\, m^2 = n^3 + 2$ есть то же самое, что и $(\exists\, m,n) \,.\, \hat{x}\,(\phi x) \in m \,.\, \hat{x}\,(\psi x) \in n \,.\, Q(m^2, n^3 + 2)$… Также $Q(x, a) \,.\vee.\, Q(x, b)$ может использоваться для определения класса так же, как Рассел использует $x = a \,.\vee.\, x = b$ [81. P. 343].

Здесь как раз видно, как именно используются экстенсиональные функции для записи математических тавтологий. Экстенсиональные функции используются Рамсеем лишь для того, чтобы показать, каким образом математические утверждения могут сделать истинными или ложными содержательные утверждения, в которых они встречаются, в зависимости от того, будут истинными или ложными они сами. Изменение выражений вроде

$(\exists x) : fx \,.\, x \neq a$

на выражение

$(\exists x) : fx \,.\, {\sim}Q(x, a)$

писем к Витгенштейну, в которых содержится попытка развёрнутого объяснения того, что подразумевают экстенсиональные функции, и того, почему критика Витгенштейна к ним не относится [81. P. 343–347]. Рамсей не закончил письмо. Тем не менее эти черновики позволяют наиболее точно прояснить, что же подразумевалось под заменой тождества экстенсиональными функциями.

или выражений вроде

$$(\exists x) : fx \,.\, {\sim}Q(x, a), \text{ а } (\exists\, m,n) \,.\, \hat{x}\,(\phi x) \in m \,.\, \hat{x}\,(\psi x) \in n \,.\, m^2 = n^3 + 2$$

на выражение

$$(\exists\, m,n) \,.\, \hat{x}\,(\phi x) \in m \,.\, \hat{x}\,(\psi x) \in n \,.\, Q(m^2 , n^3 + 2)$$

ничего не меняют в их содержании. Речь идёт просто о том, что уточняется истинностная оценка всего выражения в соответствии с тем, как интерпретируется добавка вида ${\sim}Q(x, a)$ или $Q(m^2 , n^3 + 2)$ соответственно. Тавтологичность или противоречивость данных выражений, что зависит от возможных значений переменных, будет просто уточнять тавтологичность или противоречивость всего выражения. Речь у Рамсея здесь идёт не о том, что какие-то индивиды являются тождественными или различными. Речь идёт о том, что при определённых значениях переменных мы получаем тавтологию, а при других значениях переменных – противоречие. Например, так работает ‘$Q(m^2 , n^3 + 2)$’ при добавлении к ‘$(\exists\, m,n) \,.\, \hat{x}\,(\phi x) \in m \,.\, \hat{x}\,(\psi x) \in n$’, когда определяется соотношение англичан и французов в § 3.5. Для одних значений m и n выражение ‘$Q(m^2 , n^3 + 2)$’ становится тавтологией и тем самым не оказывает влияние на истинностное значение всего выражения

$$(\exists\, m,n) \,.\, \hat{x}\,(\phi x) \in m \,.\, \hat{x}\,(\psi x) \in n \,.\, m^2 = n^3 + 2,$$

когда оно заменяется выражением

$$(\exists\, m,n) \,.\, \hat{x}\,(\phi x) \in m \,.\, \hat{x}\,(\psi x) \in n \,.\, Q(m^2 , n^3 + 2)$$

для других значений m и n выражение ‘$Q(m^2 , n^3 + 2)$’ становится противоречием, а значит, и всё выражение

$$(\exists\, m,n) \,.\, \hat{x}\,(\phi x) \in m \,.\, \hat{x}\,(\psi x) \in n \,.\, m^2 = n^3 + 2$$

становится ложным, когда оно заменяется выражением

$$(\exists\, m,n) \,.\, \hat{x}\,(\phi x) \in m \,.\, \hat{x}\,(\psi x) \in n \,.\, Q(m^2 , n^3 + 2).$$

То есть экстенсиональные функции служат не для того, чтобы отождествить один объект с другим объектом или различить эти объекты, но для того, чтобы иметь возможность разделить или отождествить значения используемых знаков. Это Рамсей утверждает далее в том же черновике письма ещё более определённо:

> Если вы принимаете $Q(x, y)$ в качестве законного символа, я не вижу, каким образом его можно отрицать. Его цель заключается не в том, чтобы сказать, что $x = y$, но в том, чтобы отсортировать одни пары значений от других [81. P. 343][1].

Таким образом, Рамсей недвусмысленно заявляет, что $Q(x, y)$ – это не простая замена того, что подразумевает ‘$x = y$’ или ‘$x \neq y$’. Здесь имеется в виду совершенно иное. Экстенсиональные функции представляют собой лишь символическое приспособление, позволяющее сохранить из *PM* то, без чего невозможно дать логистическое обоснование математики, а именно, теорию классов и введение понятия чисел с помощью понятий логики. В этом отношении символическое приспособление в виде экстенсиональных функций ничуть не хуже соглашения Витгенштейна, которым он предлагает заменить знак тождества [4, 5.53] и которое, как показывает Рамсей, весьма затруднительно провести последовательно. Главная задача Рамсея состоит в том, чтобы найти такой способ обоснования математики, который представлял бы её в виде исчисления классов, и введение приспособления в виде экстенсиональных функций служит исключительно этой цели. Поэтому приписывание экстенсиональным функциям такой задачи, как выражение тождества предметов, явно является ошибочным[2].

---

[1] В другом черновике письма к Витгенштейну Рамсей в несколько иных выражениях подразумевает то же самое: «Назовем $(\phi_e) \,.\, \phi_e x \equiv \phi_e y$, как делаете Вы, $Q(x, y)$. Я говорю (1) $Q(x, y)$ является тавтологией всегда, когда “x” и “y”имеют одно и то же значение, и противоречием, когда они имеют разные значения., (2) что, следовательно, мы можем определить $x = y \;.=.\; Q(x, y)$. ….Я полагаю, вы не оспариваете (1) (или оспариваете?), но говорите, что при условии (1) определение ошибочно. Если под этим Вы подразумеваете, что $Q(x, y)$ ***не говорит***, что ***x*** и ***y*** тождественны, я всецело согласен. Я утверждаю только то, что подстановка $Q(x, y)$ вместо $x = y$ в общую пропозицию, в которой $x = y$ является частью обобщённой функции (в записи Рассела), будет придавать всей пропозиции правильный смысл. Таким образом, в примере на стр. 351-2 моей статьи $(\exists\, m,n) \,.\, \hat{x}(\phi x) \in m \,.\, \hat{x}(\psi x) \in n \,.\, m^2 = n^3 + 2$, если мы подставляем $Q(m^2, n^3 + 2)$ вместо $m^2 = n^3 + 2$, мы получаем правильное значение всей пропозиции. Или (более простой случай) $(\exists x) : fx \,.\, x \neq a$ подразумевает то же самое, что и $(\exists x) : fx \,.\, \sim Q(x, a)$. Поэтому также и $Q(x, a) \,.\vee.\, Q(x, b)$ определяет класс, единственными членами которого являются a и b, точно так же, как $x = a \,.\vee.\, x = b$ используется Расселом. Если вы вообще принимаете $Q(x, y)$ как оправданный символ, мне кажется, что всё должно быть правильно» [81. P. 345–346].

[2] Р. Фогелин, например, считает, что Витгенштейн совершенно неправильно понял смысл экстенсиональных функций Рамсея, который считал их простыми символическими

Следует, однако, отметить, что неприятие Витгенштейном экстенсиональных функций связано не только с неверной трактовкой задачи, для которой они предназначены. Сохранить классы с тем, чтобы спасти математику в том объёме, в котором она присутствует в *PM*, представляется Витгенштейну вообще абсурдным ввиду его антиэкстенсионалистской установки. Уже в *ЛФТ* он писал:

> Теория классов в математике совершенно излишня. Это связано с тем, что общность, употребляемая в математике, – не случайная общность [4, 6.031].

Из этого афоризма ясно, что ни задача, поставленная Рамсеем, ни способ её достижения не могли и не могут удовлетворить Витгенштейна. Действительно, способ построения классов, основанный на экстенсиональных функциях, представляет общности, требуемые в математике, как совершенно произвольные, поскольку сами экстенсиональные функции, как они определены в *ОМ*, являются абсолютно произвольными соотнесениями предметов и пропозиций. Для Рамсея, ввиду его экстенсиональной установки на математику, это представляется совершенно естественным и даже необходимым, ибо, как пишет он, «только так мы можем предохранить её от большевистской угрозы со стороны Брауэра и Вейля» [17. С. 80]. Однако в такой установке Витгенштейн находит ряд дефектов, на которые указывает в работах *Философская грамматика* (*ФГ*) и *Философские заметки* (ФЗ), написанных в конце 20-х – начале 30-х годов. И в *ФГ*, и в *ФЗ* встречается следующий пассаж:

> Теория тождества Рамсея совершает ту же самую ошибку, которую сделал бы тот, кто сказал, что вы можете использовать картину так же, как зеркало, пусть даже для единственного положения. Говоря это, мы игнорируем, что для зеркала существенным является как раз то, что из него вы можете вывести положение тела перед ним, тогда как в случае картины вы должны знать, что положения, продублированные перед вами, могут объяснить картину как зеркальный образ [92. P. 315; 93. P. 143].

приспособлениями, что «позволяет представить предложения Рамсея в правильном свете. $Q(x. y)$ также является лишь символическим приспособлением, предназначенным для достижения особой цели. В частности, оно возвращает логике формальную силу, утраченную, когда Витгенштейн изгнал знак тождества… Насколько я могу видеть, критика Витгенштейном предложения Рамсея либо основана на неправильном его понимании или приписывает ему цель, которую Рамсей, очевидно исключал» [55. P. 177].

Что здесь имеется в виду? Витгенштейн здесь репродуцирует идею различия внутренних и внешних отношений, которая широко используется в системе *ЛФТ*. Внутренние отношения образа к отображаемому показываются комплексностью образа, когда мы понимаем его смысл. Так, глядя на отображение в зеркале, мы однозначно можем судить о положении отображаемого без того, чтобы соотносить их каким-то внешним образом, например, одновременно наблюдая зеркальный образ и отображаемое с некоторой внешней позиции. Внутреннее отношение связывает зеркальный образ и отображаемое непосредственно за счёт того, что они имеют одинаковую логическую комплексность, состоящую из элементов образа и их соотношений, с одной стороны, и элементов отображаемого и их соотношений, с другой. Именно поэтому положение тела в зеркале позволяет сделать непосредственный вывод о положении отображаемого тела. Совершенно не то происходит с картиной. Здесь соотнесение изображённого и изображаемого требует внешней позиции, с точки зрения которой устанавливается изоморфизм структур. Глядя на картину, мы не можем непосредственно сказать, занимает ли точно такое же положение изображённое на нём тело в действительности. Нам необходимо соотнести изображённое и изображаемое. Так, смотрясь в зеркало, бессмысленно задавать вопрос, в каком положении я нахожусь, поскольку само зеркало показывает это положение, но если мы рассматриваем свой портрет, то, для того, чтобы судить об адекватности изображённого положения, мы, как правило, обращаемся к внешнему наблюдателю. Подобная метафора зеркала вполне применима к языку, поскольку Витгенштейн считает, что «предложение – образ действительности» [4. 4.01], и этот образ находится во внутреннем отношении к тому, что отображается, т.е. факту. Поэтому предложение как образ должно адекватно отображать логическую сложность отображаемого без того, чтобы соотносить образ и факт каким-то внешним способом. То же самое касается функций и их аргументов как элементов любого предложения, по их логической сложности должны вычисляться возможные значения функций без того, чтобы соотносить их с аргументами функций внешним способом. Функция сама должна репрезентировать некоторое правило такого вычисления, точно так же, как зеркало само показывает положение отображаемого тела.

Совершенно не то мы находим относительно экстенсиональных функций Рамсея, поскольку по их логической сложности нельзя вычислить их возможные значения. Соотнесение здесь является абсолютно произвольным, аргументы, функции и значения не находятся во внутреннем отношении, но для своего построения требуют независимого соотнесения. Индивиды, выступающие в качестве аргументов экстенсиональных функций, и пропозиции, выступающие в качестве их значений, имеют различную логическую сложность и, стало быть, не могут находиться во внутренних отношениях. Если вернуться к метафоре зеркала, то экстенсиональные функции Рамсея требуют внешнего наблюдателя, который соотносил бы их возможные аргументы и значения.

По сути дела, так и поступает Рамсей, строя свои функции в виде таблицы, в которой индивидам произвольно сопоставляются пропозиции, когда пишет:

> Такая функция от одного индивида проистекает из некоего одно-многозначного отношения по объёму между пропозициями и индивидами; другими словами, из соответствия, осуществимого или неосуществимого, которое к каждому индивиду присоединяет особую пропозицию, индивид является аргументом функции, пропозиция – её значением.
>
> Так, ϕ(Сократ) может быть: Королева Анна умерла.
>
> ϕ(Платон) может быть: Эйнштейн великий человек;
>
> $\phi\hat{x}$ – это просто произвольно приписанные индивиду x пропозиции ϕx [17. С. 75].

Такого рода таблица не заключает в себе внутреннего правила построения, которое по аргументу определяло бы значение, наоборот, таблица и строится как раз для того, чтобы создать видимость такого правила, внешним образом соотнося аргументы и значения. Но тогда подобного рода таблицы являются просто конвенциями, с помощью которых задаётся соотношение аргументов и значений функции. Так же считает и Витгенштейн, называя подобные конвенции, задающие функции, определением посредством объёма (specification by extension), которые, по сути, представляет собой систему определений, где внешним образом соотносятся определяемое и определяющее. В *ФГ* относительно экстенсиональных функций Рамсея он пишет:

> Чем же точно является определение функции посредством её объёма? Очевидно, что это группа определений, например,

$$fa = p \text{ Def.}$$
$$fb = q \text{ Def.}$$
$$fc = r \text{ Def.}$$

> Эти определения дают нам возможность подставить вместо известных пропозиций “*p*”, “*q*”, “*r*” знаки “*fa*”, “*fb*”, “*fc*” [92. P. 316].

Здесь он, по сути, воспроизводить способ задания экстенсиональных функций из *ОМ*, соотнося индивиды с пропозициями, но сомневается, что, определённые таким образом Рамсеем для объяснения знака тождества, они могут иметь какое-то значение. Действительно, с точки зрения Витгенштейна, «объяснение Рамсеем знака тождества есть как раз такое определение по объёму» [92. P. 316], но имеет ли такое определение какое-либо значимое употребление? Витгенштейн считает, что нет, поскольку

> сказать, что эти три определения задают функцию $f(\xi)$, значит не сказать ничего, или сказать то же самое, что говорят эти три определения. Ибо знаки “*fa*”, “*fb*”, “*fc*” являются функцией и аргументом не в большей степени, чем функцией и аргументом являются слова “Co(rn)”, “Co(al)” и “Co(lt)”. (Здесь не имеет значения, используются ‘аргументы’ “rn”, “al” “lt” где-нибудь ещё в качестве слов или же нет.) [92. P. 317].

Витгенштейн этим утверждением, по-видимому, подразумевает, что определения экстенсиональных функций, так как понимает их он, в силу своей произвольности, ничего не объясняют и не могут объяснить относительно самих функций, но являются лишь произвольным соотнесением одних знаков с другими, а произвольное употребление знаков ничего не объясняет и не может объяснить в рамках всей символической системы[1].

---

[1] В интерпретации критики Витгенштейном экстенсиональных функций Рамсея на этот пункт в качестве главного указывает М. Мэрион. Он утверждает, что основное возражение Витгенштейна касается противопоставления стандартной, в смысле Дирихле, и нестандартной интерпретации функций. В изложении Мэриона, Дирихле считает, что функция должна определяться через произвольное соотнесение своих аргументов и значений, тогда как нестандартная интерпретация должна основываться на способе построения функций, от которого, при задании аргументов, должны зависеть её возможные значения. Возражения Витгенштейна на экстенсиональные функции Рамсея как раз и связаны с таким противопоставлением, что, как считает Мэрион, имеет подтверждение в *ФГ*, где Витгенштейн ссылается на Дирихле непосредственно после метафоры с зеркалом. Так, Мэрион пишет: «Последующее показывает, что Витгенштейн ясно осознавал намерение Рамсея возобновить стандартную интерпретацию посредством введения своих экстенсиональных функций. Метафора Витгенштейна скрывает глубокую приверженность к нестандартной интерпретации, поскольку она имеет смысл как критическое замечание толь-

Неизвестно, как Рамсей ответил бы на эти возражения Витгенштейна, об этом лишь можно догадываться на основании его общей установки. Заметим, что главное заключается, видимо, в том, что эти возражения вообще не относятся к тому, что пытается сделать Рамсей. Во-первых, он не пытается объяснить с помощью экстенсиональных функций знак тождества, как уже указывалось выше. Экстенсиональные функции есть лишь приспособление, которое позволяет сохранить из *PM* то, что касается теории классов. Во-вторых, экстенсиональные функции соотносят не знаки или их компоненты посредством определения, но реальные индивиды и пропозиции, что идёт в разрез с тем, как интерпретирует это Витгенштейн. Попытка представить экстенсиональные функции в виде номинальных определений, рассматривая их как конвенции по поводу употребления знаков, не соответствует духу того, что хочет с их помощью сказать Рамсей. Смысл экстенсиональных функций не в том, что они произвольно соотносят элементы знаковой системы, но в том, что они произвольно соотносят то, что обозначают эти элементы. Витгенштейн здесь, по-видимому, путает свою конвенцию относительно тождества из *ЛФТ*, которая касается исключительно знаков (см. § 3.1), с приспособлением, которое Рамсей предназначает для индивидов и пропозиций для того, чтобы сохранить теорию классов.

В *ФЗ* есть ещё одно возражение. Витгенштейн пишет:

> Замечательно, что в случае тавтологии или противоречия вы можете действительно говорить о смысле и значении в смысле Фреге. Если мы называем его свойство быть тавтологией значением тавтологии, тогда способ, которым она возникает, можно назвать смыслом

ко с этой точки зрения. Не удивительно тогда, что непосредственно после воспроизведения этой метафоры в *Философской грамматике* Витгенштейн упоминает понятие произвольной функции Дирихле: “Если концепция функции Дирихле имеет строгий смысл, она должна быть выражена в определении, которое использует таблицу, чтобы определить знаки функции как равнозначные” [92. P. 315]. Меня не интересует здесь, насколько оправдана эта точка зрения, но я просто хочу указать, что она связана с тем, что Витгенштейн должен сказать страницей далее относительно экстенсиональных функций Рамсея» [67. P. 363]. На этом основании Мэрион интерпретирует критику Витгенштейна в письме к Рамсею, считая её вполне обоснованной с точки зрения антиэкстенсионалистской установки Витгенштейна. В этом его интерпретация отличается от подхода Фогелина (см. предыдущее примечание), считающего, что Витгенштейн просто неправильно понял задачу, которую ставил перед собой Рамсей. Отметим, однако, что “глубокая приверженность к нестандартной интерпретации” у Витгенштейна этого периода в связи с критикой Рамсея явно не выражена, и, по-видимому, утверждения Мэриона о том, что с точки зрения этой тенденции должны истолковываться все замечания Витгенштейна относительно экстенсиональных функций, должны восприниматься с долей критики.

> тавтологии. Аналогично для противоречия. Если же, как предлагал Рамсей, знак ‘=’ объясняется тем, что $x = x$ является тавтологией, а $x = y$ – противоречием, то мы можем сказать, что тавтология и противоречие здесь не имеют ‘смысла’. Поэтому если тавтология показывает нечто посредством того факта, что как раз *этот* смысл даёт *это* значение, то тавтология *á la* Рамсей не показывает ничего, поскольку она является тавтологией по определению [93. P. 141–142].

Это возражение вполне соответствует духу антиэкстенсионалистской установки Витгенштейна с его приверженностью идее внутренних свойств, которые должны определять значения функции по характеру её аргументов. Речь в этом замечании, видимо, идёт о следующем. Тавтологии в смысле *ЛФТ* – это пропозиции, которые принимают значения истина при любом значении их конституент. При этом истинностное значение тавтологии как тавтологии вычисляется исключительно по логическим операциям, из которых она построена. В этом случае можно сказать, что пропозициональная функция, соответствующая тавтологии, предопределяет её значение, вычисляемое по характеру логических операций. Функция связывает внутренним отношением аргументы и значения. Например, пропозиция ‘$p \supset {\sim}{\sim}p$’ является тавтологией, при этом её значение полностью определяется посредством смысла логических операций ‘$\supset$’ и ‘$\sim$’, с помощью которых построена функция распределения истинностных значений. Здесь способ построения функции однозначно задаёт значение выражения ‘$p \supset {\sim}{\sim}p$’, т.е. аргументы и значения функции, с точки зрения Витгенштейна, соотнесены внутренним отношением, поскольку аргументы и значения функции можно однозначно определить по способу её построения. Здесь вполне понятна ссылка на введённое Г. Фреге различие смысла и значения выражений. Согласно цитате значением тавтологии будет истина, а её смыслом – способ распределения истинностных значений её конституент, заданный соответствующей пропозициональной функцией, соотносящей значения конституент со значением всей пропозиции. В этом отношении объяснение Рамсеем знака ‘=’, конечно, не будет удовлетворять определению тавтологии у Витгенштейна, поскольку функция $Q(x, y)$ не содержит в себе способа построения значения функции по характеру её аргумента. В интерпретации Витгенштейна она действительно является произвольной конвенцией. Отметим, однако, что Рамсей и не претендовал на то, что с помощью его экстенсиональных функций могут строиться тавтологии, имеющие тот же самый смысл, который под логическими тавтологиями подразумевал Витгенштейн. Наоборот, Рамсей считал, что наряду с логическими тавтологиями в строго определённом Витгенштейном смысле могут существовать специфические математические тавтологии, которые позволяют уточнить истинностное значение утверждений не только с точки зрения распределения истинностных значений, но и с точки зрения количества существующих вещей в мире.

Подведём итоги. Против экстенсиональных функций Рамсея Витгенштейн выдвигает три возражения: 1) функция $Q(x, y)$ не является адекватной заменой тождества, поскольку приводит, как и сам знак тождества, к бессмысленным следствиям; 2) функция $Q(x, y)$, собственно, не является функцией, поскольку не отражает внутреннего отношения, в котором должны находиться аргументы и значения функции, а является произвольной конвенцией или определением; 3) пропозиции, построенные с помощью этой функции, не могут рассматриваться как тавтологии или противоречия в логическом смысле, поскольку их истинностное значение не вычисляется посредством логических операций. Но, как мы попытались показать, критические замечания Витгенштейна бьют мимо цели. Во-первых, функция $Q(x, y)$ у Рамсея не является заменой знака тождества, но представляет собой символическое приспособление, позволяющее сохранить теорию классов. Во-вторых, критика Витгенштейна связана с его антиэкстенсионалистской установкой, направленной на то, чтобы вообще исключить теорию классов из математики. Но это противоречит намерениям Рамсея, его функция $Q(x, y)$ имеет принципиально экстенсиональный характер. В-третьих, Рамсей не пытается представить выражения, построенные с помощью функции $Q(x, y)$, как логические тавтологии, но считает их специфическими математическими тавтологиями.

4. КОЛИЧЕСТВО ВЕЩЕЙ В МИРЕ И ТРАНСЦЕНДЕНТАЛЬНЫЙ СМЫСЛ АКСИОМЫ БЕСКОНЕЧНОСТИ

4.1. Рассел о бесконечности

Экстенсиональные функции, рассмотренные в предыдущем параграфе, Рамсей использует для переинтерпретации аксиомы бесконечности и аксиомы мультипликативности. Но прежде, чем увидеть, каким образом экстенсиональные функции позволяют рассматривать эти аксиомы в качестве тавтологий, обратимся к тому, почему понятие бесконечности вызывает проблемы.

Характерной особенностью логистической системы *PM* является наличие в ней аксиомы бесконечности (***АБ***), которая утверждает, что любому индуктивному кардиналу n соответствует класс, содержащий n членов, где под индуктивными кардиналами понимаются все числа натурального ряда, являющиеся последующими элементами 0, и каждый последующий индуктивный кардинал получается прибавлением 1 к предыдущему индуктивному кардиналу [39. Т 2. С. 223–226]. Из ***АБ***, в частности, следует, что общее число членов, образующих классы, превосходит любой индуктивный кардинал, поскольку для любого заданного индуктивного кардинального числа n можно получить индуктивный кардинал n+1, а значит, существует класс с n+1 членами и число членов не может ограничиваться n. Таким образом, ***АБ*** утверждает, что имеется по крайней мере столько же элементов, являющихся членами классов, сколько имеется чисел в натуральном ряду, а именно, $\aleph_0$, т.е. общее число таких элементов само не является индуктивным кардиналом.

Введение этой аксиомы мотивировано некоторыми особенностями, принимаемыми в *PM* определением кардинальных чисел и аксиоматизацией арифметики, предложенной Дж. Пеано. Согласно определению кардинальных чисел, каждое из них представляет собой класс всех подобных классов, т.е. таких классов, члены которых находятся во взаимно однозначном соответствии, или равночисленных классов [39. Т. 2. С. 57]. Если взять индуктивные кардиналы, то, в частности, 0 определяется как класс всех классов, подобных $\varnothing$, а индуктивный кардинал k (где $k > 0$) есть класс всех таких классов, которые содержат ровно k членов, которые также можно поставить во взаимно однозначное соответствие. При этом понятие подобия (равночисленности или взаимно однозначного соответствия) более фундаментально, чем понятие кардинального числа, поскольку подобие можно установить, не обращаясь к понятию числа (т.е. к вопросу "сколько?"). Так, всегда можно решить вопрос, равночисленны ли классы {a, b, c …} и {a', b', c' …} или же нет, поставив их во взаимно однозначное соответствие. Таким образом, понятие классов, находящихся во взаимно однозначном соответствии более фундаментально, чем понятие числа. Наоборот, понятие числа производно от понятия равночисленных классов.

Обратимся к индуктивным кардинальным числам. Представим, что члены, входящие в классы, ограничены, например, количеством m. Тогда индуктивные кардинальные числа также ограничены, поскольку максимальный индуктивный кардинал будет определяться как класс всех m-равночисленных классов. Если же взять любой индуктивный кардинал n, больший m (т.е. $n > m$), то он будет равен 0, поскольку нет никаких классов, классом классов которых он бы являлся. Это означает, что при ограниченности членов, которые могут составлять классы, ограничены также и индуктивные кардиналы. Если количество членов, которые могут составлять классы, ограничены m, равными 0 становятся n, n+1, n+1+1 и т.д. (где $n = m+1$, $n+1 = m+1+1$ и т.д.). То есть любое построение, основанное на принципе индукции, становится бессмысленным.

Однако такое представление противоречит аксиоматизации арифметики, предложенной Дж. Пеано. Согласно этой аксиоматизации два различных индуктивных кардинала не могут иметь один и тот же последующий элемент, т.е. если $m+1 = n+1$, то $m = n$. Но при ограничении количества членов, образующих классы, как раз и получается ситуация, при которой это условие не выполняется. Действительно, если количество членов класса ограничено m, то m+1, а также и n+1 (при любом n, которое больше m) будет равно 0. А отсюда не будут выполняться интуитивно очевидные арифметические операции с индуктивными кардиналами, вытекающие из аксиоматики Дж. Пеано, вроде сложения, поскольку тогда $m+1 = n+1$ (при любом $m > 0$, $m \neq n$ и $n > m$).

Таким образом, предположение об ограниченности количества членов, образующих классы, приводит к тому, что обычная арифметика оказывается невозможной в том смысле, что обычные операции не приводят к ожидаемому результату, поскольку, например, любое сложение $m + n$ должно приводить к 0, если индуктивные кардиналы m или n превосходят количество имеющихся членов возможных классов. Поэтому, если мы принимаем обычные арифметические операции, необходимо принять и ***АБ***, а вместе с ней и необходимость принять бесконечность членов, из которых могут быть образованы классы.

АБ вводит в математику идею бесконечности, и против этого нечего возразить. Действительно, без предположения бесконечности была бы невозможна математика в том виде, в котором она принимается в системе *PM*. Математика без идеи бесконечности ничего не стоит, и ***АБ*** должна восполнить то, чего ей бы недоставало. Но приведённые выше аргументы ограничиваются лишь формальной стороной, формальной в том смысле, что без ***АБ*** были бы невозможны многие построения *PM*. Иначе зачем было бы принимать её в качестве аксиомы? Однако то, как введение этой аксиомы в ряде случаев интерпретирует Б. Рассел, порождает некоторые содержательные проблемы, касающиеся как её понимания, так и её формулировки. Эти проблемы затрагивают два типа вопросов. Первый из них касается самой идеи бесконечности, второй – характера аксиомы, посредством которой она вводится. Вопросы первого типа сводятся к следующему:

1. Разве идею бесконечности нельзя ввести, основываясь на априорных основаниях, доказывая её необходимость на базе более фундаментальных, исходных понятий? В этом случае идея бесконечности оказалась бы производной и, следовательно, не требовала бы особого, принимаемого без доказательств положения. И здесь возможны два варианта:

1(a). Выводима ли эта идея сугубо аналитически, т.е. является ли она производной таких понятий, необходимость которых обоснована через закон недопущения противоречия?

Или же

1(b). Эта идея основана на содержании понятий, представляющихся самоочевидными, и, следовательно, идею бесконечности можно основать на принципах, доказательность которых должна казаться столь же очевидной, как и очевидность содержания самих этих исходных понятий?

2. Если идею бесконечности нельзя обосновать априорно, быть может, её можно обосновать *a posteriori*, основываясь на опыте? В этом случае содержание мира должно было бы показать, что идея бесконечности есть следствие здравого смысла, основанного на восприятии и индукции.

Второй тип вопросов касается природы утверждения, т.е. ***АБ***, посредством которого вводится бесконечность:

3. Если идею бесконечности нельзя обосновать, то что представляет собой принимаемое без доказательства утверждение о её существовании? Принимается ли ***АБ*** в силу своего содержания, т.е. именно её содержание служит основанием выводимых из неё следствий, или же основанием служит её форма, согласно которой ***АБ*** можно классифицировать как предложение логики, т.е. предложение, принимаемое просто в силу формы, которую, в конечном счёте, обнаруживает совокупность предложений, независимо от своего содержания? Должны ли мы принимать *АБ* как утверждение о содержании мира или же как утверждение о структуре описания, в которой мир может быть представлен? Должна ли ***АБ*** рассматриваться как истина априорная и логическая или же как апостериорная и эмпирическая?

Обращаясь к вопросам первого типа, предполагающим аналитический характер идеи бесконечности, прежде всего, стоит указать на аргументацию, производную от способа введения чисел, предложенного Г. Фреге (подробнее см. выше § 1.4.1), от которой в определённой степени зависит способ введения числа в системе *PM*. В данном случае число предлагается рассматривать как общее свойство произвольных классов (при этом само данное общее свойство задаёт класс), между членами которых можно установить взаимно однозначное соответствие. Так, если имеется класс $\{a, b, c \ldots\}$ и класс $\{\alpha, \beta, \gamma \ldots\}$, где a, b, c, … α, β, γ … – элементы произвольной природы, то это классы имеют одно и то же число, если мы можем взаимно однозначно сопоставить их члены, скажем, так: a с α, b с β, c с γ и т.д., и при этом не окажется таких элементов из одного из этих классов, который не был бы сопоставлен одному и только одному из элементов другого из этих классов. Этот подход нетрудно распространить на классы со сколь угодно большим количеством элементов.

Этот подход ещё не даёт понятия конкретных чисел, он даёт только понятие равночисленности классов. Для того чтобы получить понятия конкретных чисел, нужно указать способ установления равночисленности. Для этого необходимо выделить некоторый класс, равночисленность с которым, т.е. взаимно однозначное соответствие с его элементами элементов другого класса, будет давать один и тот же результат. Такой класс нетрудно найти для 0. Этот класс должен содержать пустое множество членов, т.е. $\varnothing$, и его можно задать посредством функции $x \neq x$, поскольку элементов, выполняющих данную функцию, нет. Далее, раз у нас есть $\varnothing$, мы можем образовать класс, состоящий из этого элемента, т.е. $\{\varnothing\}$, и этот класс задаёт число, которое соответствует всем тем классам, которые ему равночисленны, а именно, число 1. Из уже имеющихся элементов $\varnothing$ и $\{\varnothing\}$ образуется следующий класс: $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$, где, помимо $\varnothing$, в качестве члена содержится класс, образованный из $\varnothing$, т.е. $\{\varnothing\}$, а класс всех тех классов, которые находятся с $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ во взаимно однозначном соответствии, образует число 2. Этот процесс нетрудно продолжить, и в результате мы получаем ряд классов классов, находящихся во взаимно однозначном соответствии с $\varnothing$, $\{\varnothing\}$, $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$, $\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$ ... и т.д. Таким образом, мы получаем ряд натуральных чисел, возрастающих бесконечно вместе с возрастанием классов, поскольку каждое предшествующее кардинальное число содержится в каждом последующем в качестве подкласса. При таком построении класс всех натуральных чисел был бы равен $\aleph_0$, и ***АБ*** не понадобилась бы.

Кроме того, аргументация первого типа, предполагающая аналитический характер идеи бесконечности, может основываться на известной теореме Г. Кантора, согласно которой, если задан класс с n членами, то можно образовать класс подклассов заданного класса, членов которого будет 2^n, что больше членов, содержащихся в n. Например, пусть изначальный класс будет пустым, т.е. $\varnothing$, тогда членов класса, образованного из исходного, будет 1, поскольку 2^0 будет 1, а именно $\{\varnothing\}$. Далее, пусть $n = 1$, то 2^1 будет 2, а именно, $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$. Затем, если $n = 2$, то $\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$ и т.д. Классы, полученные таким образом, можно объединять, при этом, в силу свойств операции объединения, лишние члены объединения будут сокращаться, и объединением подобных классов можно получать класс членов, с которым некоторые классы будут находиться во взаимно однозначном соответствии. Поскольку n – произвольно, произвольно и 2^n, и, таким образом, можно получать любые равночисленные классы. Если же классы равночисленных классов мы определяем как натуральные числа, то мы получаем и все натуральные числа. И класс всех этих классов был бы также равен $\aleph_0$, и ***АБ*** не понадобилась бы.

Несмотря на привлекательность подобных способов введения идеи бесконечности в формальную структуру, основанных исключительно на аналитических методах, они тем не менее не обоснованы, поскольку содержат противоречия. Одно из таких противоречий обнаружил уже сам Г. Кантор. Это противоречие касается класса всех классов. Пусть таким классом будет $\mathfrak{I}$. Согласно вышеуказанной теореме, этот класс будет содержать такое количество членов, которое должно превосходить любое количество членов у содержащихся в нём элементов. Но, согласно этой же теореме, класс $2^{\mathfrak{I}}$ будет содержать членов больше чем $\mathfrak{I}$. Однако, согласно определению $\mathfrak{I}$ как класса всех классов, $\mathfrak{I}$ содержит класс с $2^{\mathfrak{I}}$ членами в качестве элемента.

Исследуя возможность решения данной проблемы, Рассел обнаружил ещё одно противоречие, так называемый парадокс Рассела, который более фундаментален, поскольку не зависит от теоремы Кантора. Парадокс Кантора получается постольку, поскольку предполагается, что класс $\mathfrak{I}$ содержит класс с $2^{\mathfrak{I}}$ членами в качестве элемента. Но предположим более общую ситуацию. Для начала разделим все классы на те, которые содержат сами себя в качестве членов, и те, которые не содержат сами себя в качестве членов. Пусть теперь $\mathfrak{I}$ будет классом всех тех классов, которые не содержат сами себя в качестве членов. Тогда ответ на вопрос о том, к каким классам, к тем, которые содержат сами себя в качестве членов, или к тем, которые не содержат сами себя в качестве членов, относится сам класс $\mathfrak{I}$, в любом случае приводит к противоречию.

Выход из сложившейся ситуации Рассел находит в разработанной им простой теории типов (подробнее см. выше § 1.4.2). В терминах классов простую теорию типов можно описать следующим образом. Типы образуют иерархическую систему логических элементов, в которой необходимо строго различать классы и то, что их образует. Элементы класса всегда относятся к типу, более низкому, чем сам класс. Так, если α, β, γ относятся к типу n, то образованные из них классы $\{\alpha\}$, $\{\alpha, \beta\}$, $\{\beta, \gamma\}$, $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ и т.д. относятся к типу $n+1$. Низшим типом логических элементов Рассел считает индивиды, понимаемые как единичные, самостоятельно существующие предметы. Следующий логический тип образуют классы, составленные из индивидов; затем идут классы, образованные из классов, составленных из индивидов, и т.д. Пусть a, b, c … – индивиды, относящиеся к типу 1, тогда классы $\{a\}$, $\{a, b\}$, $\{a, b, c\}$ … образуют второй тип, классы $\{\{a\}\}$, $\{\{a\}, \{b, c\}, \{\{a\}, \{b, c\}\},\{a, b, c\}\}\}$ – третий тип и т.д. При этом следует отметить, что само понятие индивидов не обязательно специфицировать относительно принимаемой онтологии, оно может быть ограничено лишь тем, что индивиды образуют первый тип в иерархии.

Рассел формулирует следующее ограничение на образование подобных типов: в рамках одного типа нельзя образовывать классы, которые состоят из членов, относящихся к разным типам. С этой точки зрения незаконными образованиями являются конструкции вида $\{a, \{a\}\}$, $\{a, \{a\}, \{a, \{a\}\}\}$ и т.п. Простая теория типов блокирует вышеуказанные парадоксы, рассматривая конструкции, на которых они основаны, как бессмысленные образования[1]. Но здесь возникают новые проблемы. Если конструкции вида $\{a, \{a\}\}$, $\{a, \{a\}, \{a, \{a\}\}\}$ бессмысленны, тогда можно ли вообще ввести идею бесконечности на чисто логических основаниях?

Типы всё-таки можно образовать. И если есть n элементов типа m, из них можно образовать классы, относящиеся к типу m+1. Так, из класса $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ типа m можно образовать класса типа m+1 следующего вида: $\{\{\alpha\}, \{\beta\}, \{\gamma\}, \{\alpha, \beta\}, \{\alpha, \gamma\}, \{\beta, \gamma\}, \{\alpha, \beta, \gamma\}\}$ и т.п., которые будут содержать больше членов, чем исходный класс. И все индуктивные кардинальные числа посредством определения через взаимно однозначное соответствие можно ввести, так как классы, относящиеся к различным типам, можно уравнять. Так, например, во взаимно однозначном соответствии находятся класс, состоящий из одного элемента, и класс, состоящий из одного этого класса (т.е. класс $\{\alpha\}$ и класс $\{\{\alpha\}\}$). Поэтому, если есть хоть один элемент, можно получить определение 1 для любого типа[2]. Отталкиваясь от

---

[1] Заметим, что подобный подход характеризует только теорию типов Рассела и производные от неё теоретико-типовые подходы. Аксиоматическая теория множеств в форме Цермело-Френкеля или фон Неймана принимает подобный способ построения бесконечности в виде аксиомы, предполагая, что построение бесконечности должно зависеть не от способов построения, но от ограничений, до которых эти способы могут дойти. Поэтому введение идеи бесконечности в форме модифицированной аксиомы, основанной на подходе Фреге, дополняется ограничивающими аксиомами на построение множеств [44]. Так, одна из версий аксиомы бесконечности прямо вводит способ построения бесконечности по Фреге, но аксиома об образовании множеств вводит ограничения на образование таких множеств, которые приводят к противоречиям типа Кантора и Рассела [43].

[2] Следует отметить, что здесь возникает ещё одна предпосылка, утверждающая, что должны быть члены, образующие классы (хотя бы один такой член). Рассел принимает эту предпосылку в форме $\exists x(x=x)$, что предполагает существование хотя бы одного элемента, из которого можно образовать класс. Но эта предпосылка составляет особую проблему, связанную с тождеством (см. выше § 3.2).

такого подхода, можно получить определение числа для наибольшего типа и применить его к типам, идущим в иерархии типов ниже. Однако, поскольку все такие классы будут конечными, пусть и сколько угодно большими, так как из конечного количества членов можно образовать только конечное количество содержащих их классов, эти классы не дадут бесконечного числа. И их невозможно объединить, чтобы получить $\aleph_0$, поскольку это противоречит теории типов, т.е. они будут давать только индуктивное кардинальное число. Как утверждает Рассел,

> иерархия типов имеет важные следствия в отношении сложения. Предположим, у нас есть класс из α членов и класс из β членов, где α и β являются кардинальными числами; может случиться так, что их совершенно невозможно объединить, чтобы получить класс, состоящий из членов α и из членов β, поскольку, если классы не относятся к одному и тому же типу, их логическая сумма бессмысленна. Только там, где рассматриваемое число классов конечно, мы можем устранить практические следствия этого благодаря тому факту, что мы всегда можем применить к классу, который увеличивает свой тип до любой требуемой степени без изменения своего кардинального числа… Следовательно, для любого конечного числа классов различных типов мы можем увеличить все их до типа, который мы можем назвать наименьшим общим множителем всех рассматриваемых типов; и можно показать, что это может быть сделано таким способом, что результирующие классы не будут иметь общих элементов. Затем мы можем образовать логическую сумму всех полученных таким образом классов, и её кардинальное число будет арифметической суммой кардинальных чисел изначальных классов. Но там, где у нас есть бесконечные последовательности классов восходящих типов, этот метод применить нельзя. По этой причине мы не можем доказать, что должны быть бесконечные классы, ибо предположим, что было бы вообще только n индивидов, где n – конечно. Тогда было бы 2^n классов индивидов, 2^{2^n} классов классов индивидов и т.д. Таким образом, кардинальное число членов каждого типа было бы конечно; и хотя эти числа превосходили бы любое заданное конечное число, не было бы способа сложить их так, чтобы получить бесконечное число [27. С. 60].

Таким образом, получается, что, принимая теорию типов, сугубо с помощью логики дойти до $\aleph_0$ нельзя, т.е. идею бесконечности чисто аналитически ввести невозможно. На поставленный выше вопрос 1(a) – ответ отрицательный.

Обратимся к вопросу 1(b). Попытку подобного введения идеи бесконечности Рассел находит в диалоге «Парменид» Платона. Аргументация Платона сводится к следующему. Если имеется число 1, то оно имеет бытие. Но бытие и 1 не тождественны. Поэтому бытие и 1 образуют 2. Так как 1 и 2 не тождественны, то они образуют 3 и т.д. *ad infinitum*. Рассел считает это доказательство неверным по двум причинам. Во-первых, потому, что «‘бытие’ не есть термин, имеющий некоторое определённое значение» [25. С. 170]. Возможно, это связано с тем, что различать вещь и её бытие имело бы смысл, если бы бытие являлось свойством, выражаемым предикатом. Но для Рассела идея бытия исчерпывается логическим квантором существования, который не обозначает реальное свойство, но указывает на область пробега переменной[1]. И, во-вторых, даже если бы термину ‘бытие’ и удалось придать определённое значение и рассматривать бытие как свойство, то это не имело бы значения для чисел. Связано это с тем, что Рассел считает числа логическими фикциями, и даже не просто фикциями, а, так сказать, фикциями второго порядка. Связано это с принимаемым Расселом определением числа. Как указывалось выше, понятие числа производно от понятия класса, число является классом всех равночисленных классов. Но классы не имеют реального существования. С точки зрения Рассела, реальны лишь индивиды, т.е. единичные, самостоятельно существующие или субсистентные вещи. Так, *Сократ* – это индивид, субсистентная вещь, тогда как класс философов не индивид, т.е. не является самостоятельной вещью. Классы задаются как область определения пропозициональной функции, областью значения которой являются истина и ложь. Так, класс философов образуют те индивиды, которые при подстановке на место индивидной переменной в функцию *Философ*(*x*) дают истину (т.е. {*Сократ*, *Платон*, *Аристотель* …}). Но сам класс {*Сократ*, *Платон*, *Аристотель* …} является фикцией.

Второй аргумент подобного вида связан с понятием рефлексивных классов. Рефлексивные классы Рассел определяет как классы, равночисленные некоторым своим подклассам. Свойством рефлексивности обладают только классы с бесконечным количеством членов. Действительно, возьмём любой конечный класс с *n* членами, тогда любой его подкласс, кроме самого этого класса, будет содержать количество членов меньше, чем *n*. Это вытекает из определения

[1] Кроме того, отметим, что 1 всё-таки должна быть, а это приводит к проблеме с тождеством, как указывалось в § 3.2.

понятия индуктивного кардинального числа, поскольку каждый последующий индуктивный кардинал больше предшествующего, а все подклассы класса с заданным индуктивным кардиналом имеют предшествующий индуктивный кардинал. Однако не так дело обстоит с бесконечными классами. Так, например, согласно доказательству Г. Кантора, класс рациональных чисел равночислен классу натуральных чисел, но класс натуральных чисел является подклассом класса рациональных чисел. Рассел считает рефлексивность отличительным свойством бесконечности [82. P. 357]. Поэтому если бы удалось доказать существование рефлексивных классов, то тем самым было бы обосновано существование бесконечности.

Попытку обосновать существование рефлексивных классов Рассел находит у Б. Больцано и Р. Дедекинда [25. С. 171]. Вкратце эта попытка сводится к следующему. Относительно всех объектов можно образовать идеи этих объектов, но сами идеи объектов также являются объектами. Поэтому класс всех объектов является рефлексивным, поскольку идеи его объектов сами же являются его членами. Необоснованность такого введения бесконечности Рассел видит, прежде всего, в смутности самого понятия идея, и неважно, будет ли она пониматься психологически или в стиле Платона. В любом из этих случаев необходимо приводить дополнительные доказательства, в первом случае – эмпирические, что выходит за рамки априорного доказательства, во втором случае необходимо принимать сомнительные спекуляции относительно существования мира объективных идей.

Но даже если принять идеи, то, как считает Рассел, такой способ введения бесконечности не будет логически сообразным. Так, если мы принимаем теорию идей Платона, то мы должны также принять, что идея либо тождественна тому, идеей чего она является, либо не тождественна, а должна представлять собой его описание через указание некоторых свойств. Но тогда, первая альтернатива исключается, поскольку «для доказательства рефлексивности существенным является различие объекта и идеи» [25. С. 172], однако Рассел принимает принцип Лейбница об отождествлении неразличимых, а вторая альтернатива исключается, поскольку не выполняется принцип взаимно однозначного соответствия, который важен для установления равночисленности классов. Рефлексивные классы именно равночисленны своим подклассам, но поскольку идей относительно одного и того же объекта может быть много, то взаимно однозначного соответствия установить нельзя.

Этот же аргумент касается также идей в психологическом смысле. Как утверждает Рассел,

> если ‘идея’ интерпретируется психологически, то тут нужно подчеркнуть, что нет никакой определённой психологической сущности, которая могла бы быть названа единственной идеей объекта: имеется неисчислимое количество вер и установок, каждая из которых может быть названа идеей объекта в том смысле, в котором мы могли бы сказать ‘моя идея Сократа совершенно отлична от вашей’, но нет никакой центральной сущности (за исключением самого Сократа), которая могла бы связать различные ‘идеи о Сократе’, и значит, нет никакого одно-однозначного отношения идеи и объекта [25. С. 172].

То есть любые психологические идеи относительно любых объектов многочисленны, и именно поэтому установить взаимно однозначное соответствие между первыми и вторыми невозможно. А значит, невозможно обосновать идею рефлексивных классов, основанных на понятии взаимно однозначного соответствия самого класса и некоторых его подклассов. Таким образом, ответ на вопрос 1(b), если принять точку зрения Рассела, также является отрицательным.

На вопрос 2, т.е. на вопрос о возможности апостериорного обоснования идеи бесконечности с помощью опыта и здравого смысла, лучше всего отрицательно ответить словами самого Рассела:

> Можно было бы подумать… что эмпирические аргументы, выводимые из пространства и времени, разнообразия цветов и прочего, вполне достаточны для доказательства реального существования бесконечного числа отдельных вещей. Я в это не верю. У нас нет никаких причин верить… в бесконечность пространства и времени, во всяком случае в смысле, в котором пространство и время являются физическими фактами, а не математическими фикциями… Теория квантов в физике, является она истинной или ложной, иллюстрирует тот факт, что физика никогда не может привести доказательства непрерывности, хотя вполне возможно, что предоставит опровержение этому… Нет никаких эмпирических причин верить в то, что число вещей в мире бесконечно; но также нет в настоящее время эмпирических причин полагать, что их число конечно [25. С. 172].

Бесконечность или конечность мира есть предмет веры, а не рационального доказательства, основанного на эмпирических фактах, являющихся основой теоретического обобщения.

Из отрицательного ответа на вопросы 1 и 2 Рассел делает пафосный, но, в общем-то, правильный, согласно его собственным предпосылкам, вывод:

> Из того факта, что бесконечное не является самопротиворечивым, но также и не демонстрируемо логически, мы должны заключить, что ничего не может быть известно *a priori* относительно того, является ли мир конечным или бесконечным. Если принять терминологию Лейбница, то, по нашему заключению, некоторые из возможных миров конечны, некоторые бесконечны, и у нас нет средств узнать, к какому типу относится наш действительный мир. Аксиома бесконечности будет истинна в одних возможных мирах и ложна в других, и является ли она истинной или ложной в нашем мире, мы сказать не можем [25. С. 173].

Хотя лучше было бы сказать так: Сама по себе идея бесконечности не является самопротиворечивой, к противоречию приводят только попытки априорно доказать необходимость этой идеи. К этому добавим, что раз нельзя *a priori* доказать необходимость этой идеи для действительного мира, то это же самое нельзя доказать и для любого возможного мира.

Таким образом, относительно введения идеи бесконечности в формальную структуру Рассел отвергает логические аргументы, поскольку они приводят к противоречию. Точно так же он отвергает априорные аргументы, основанные на самоочевидности понятий, с помощью которых можно сформулировать эту идею. Идею бесконечности, к тому же, нельзя ввести и *a posteriori*, поскольку ничто в структуре реальности не свидетельствует о её необходимости. То есть попытка ввести идею бесконечности *a priori* несостоятельна, а попытка ввести её *a posteriori* неубедительна. Следовательно, требуется особая аксиома, т.е. ***АБ***. И в структуре рассуждений Рассела ***АБ*** занимает особое положение. Поскольку бесконечность нельзя обосновать ни *a priori*, ни *a posteriori*, необходимо принять нечто вроде гипотетического императива. То есть если мы хотим доказать некоторые вещи, то необходимо принять ***АБ***. Для доказательства некоторых пропозиций из *PM* утверждение в виде ***АБ*** нужно принимать в качестве гипотезы. Что же представляет собой эта гипотеза? Здесь мы выходим на третий из указанных выше вопросов: Что представляет собой ***АБ***? Принимается ли ***АБ*** в силу своего содержания, т.е. именно её содержание служит основанием выводимых из неё следствий, или же основанием служит её форма, согласно которой ***АБ*** можно квалифицировать как предложение логики, т.е. предложение, принимаемое просто в силу формы, которую, в конечном счёте, обнаруживает совокупность предложений, независимо от своего содержания? То есть если ***АБ*** принимается в силу своего содержания, то она должна что-то предполагать в структуре мира, если же она касается сугубо формы наших рассуждений, то она должна, так или иначе, иметь логический характер, обнаруживаемый структурой наших рассуждений.

Однако в структуре *PM* все рассуждения об объектах рассматриваются как предположение только для доказательства данного результата, и это предположение при необходимости может быть отброшено, т.е. не рассматриваться как логически необходимое. Так, во всех утверждениях *PM*, которые зависят от принятия аксиомы бесконечности, сама эта аксиома рассматривается как гипотеза. В частности, в *PM* об аксиоме бесконечности утверждается:

> Это предположение будет приводиться в качестве гипотезы тогда, когда это будет уместно. Ясно, что в логике не найдётся ничего из того, чтобы обосновать его истинность или ложность, и что в нём можно лишь легитимно быть убеждённым или не быть убеждённым, опираясь на эмпирические основания [39. Т. 2. С. 225].

Поэтому для любого результата вида *T*, доказательство которого требует ***АБ***, в *PM* доказывается не сам результат вида *T*, а импликация ***АБ*** $\supset$ *T*. Поэтому ***АБ*** имеет содержательный характер, вне зависимости от того, как его трактовать (например, если понятие объект трактовать в физическом смысле, то на вопрос об истинности данной аксиомы можно было бы ответить только с помощью данных физики), и, стало быть, все подобные результаты будут выходить за рамки логики [43. С. 202–203]. Таким образом, ***АБ*** в системе *PM* имеет экстралогический характер, экстралогический в том смысле, что она нечто утверждает о содержании мира, а не относится к структуре рассуждений.

Таким образом, согласно Расселу, получается, что всякое введение бесконечности в структуру наших рассуждений предполагает обращение к содержанию мира, действительного или возможного. И это предполагается не только идеей бесконечности, но и высказыванием, с помощью которого она может быть введена. Так, мы получаем ответ на вопрос 3. Утверждение о бесконечности вещей в мире имеет содержательный характер и не может рассматриваться как предложение логики.

Вывод: Ни в одном из вышепоставленных вопросов идея бесконечности, согласно Б. Расселу, не является логической. Предложением логики не является и высказывание, посредством которого её можно ввести. Стало быть, бесконечность есть содержательная идея, которую невозможно обосновать *a priori*.

4.2. Псевдопонятие 'объект' в «Логико-философском трактате» Л. Витгенштейна

Анализ идеи бесконечности в предыдущем параграфе показывает, что идея количества вещей в мире трактуется в *PM* содержательно и не может рассматриваться как необходимое следствие принятой логики. Реформа логистического подхода, которую предлагает Рамсей, естественно, не может отталкиваться от подобных оснований. Подобные основания Рамсей находит в *ЛФТ*, правда, существенно изменяя их смысл и, соответственно, трактовку и способы использования самой символики. Но прежде чем обратиться к этим изменениям, рассмотрим, что предлагает Витгенштейн. В *ЛФТ* Витгенштейн пишет:

> Переменное имя "*x*" есть собственно знак псевдопонятия *объект*. Там, где всегда правильно употребляется слово "объект" ("предмет", "вещь" и т.д.), оно выражается в логической символике через переменные имена. Например, в предложении "Имеется два объекта, которые …" через "($\exists x, y$) …". Там же, где оно употребляется иначе, т.е. как собственно понятийное слово, возникают бессмысленные псевдопредложения. Так, например, нельзя сказать: "Имеются объекты", как говорят "Имеются книги". И также нельзя говорить "Имеется 100 объектов" или "Имеется $\aleph_0$ объектов". И вообще бессмысленно говорить *о количестве всех объектов* [4, 4.1272].

В этом утверждении содержится три основных момента. Во-первых, здесь выражена фундаментальная для раннего Витгенштейна идея различения того, что может быть сказано в языке, и того, что показывается его структурой [28. С. 188–194]. Это различие, в частности, проявляется как различие между собственно понятиями и формальными понятиями (или псевдопонятиями). Собственно понятия выражаются функциями с соответствующими пробегами переменных, и эти функции говорят о реальных свойствах и отношениях. На формальные же понятия указывает использование разного типа переменных, которые не говорят ничего, но показывают своё возможное значение. Поэтому попытка явно выразить в формальном языке, что же подпадает под формальные понятия, является бессмысленной, так как в этом случае формальные понятия уподобляются собственно понятиям. Однако

> формальные понятия не могут, как собственно понятия, изображаться функцией. Потому что их признаки, формальные свойства, не выражаются функциями. Выражение формального свойства есть черта определённого символа [4. 4.126].

Так, то, что мы используем выражения типа “fx”, где ‘x’ – индивидная переменная, уже показывает, что возможными значениями этой переменной являются объекты, и, следовательно, дополнительного указания на то, что имеются объекты, не требуется. Речь, собственно, идёт о том, что если мы используем переменные, то говорить об области действия этих переменных не имеет смысла, поскольку то, как используются эти переменные, показывает их пробег. А отсюда вытекает, что утверждение о существовании объектов бессмысленно уже хотя бы потому, что использование определённого типа переменных указывает на то, что эти объекты имеются (т.е. использование символа fx уже показывает, что x имеет пробег, соответствующий $\hat{f}$, и ничего более не нужно). Сама форма предложения, где есть переменная для объектов, указывает на то, что они есть, а сколько их – это вопрос другой. Если они есть, то они есть, что демонстрируется использованием индивидных переменных, а если бы их не было, то не было бы и никаких индивидных переменных. В некотором смысле, утверждать, что объекты есть, используя при этом индивидные переменные, – тавтология, поскольку то, что мы пытаемся выразить, показывается самой формой выражения. Применяясь к словоупотреблению Витгенштейна, говорить, что «Имеются x, и x есть объекты, такие, что …» – бессмысленно, поскольку само употребление переменной ‘x’ показывает, что объекты есть, а «то, что *может* быть показано, *не может* быть сказано» [4. 4.1212].

Во-вторых, бессмысленно говорить не только о том, что вообще имеются объекты. Бессмысленно любое выражение, где используется псевдопонятие объект. Видимость в необходимости такого использования возникает тогда, когда объекты нужно, в частности, отождествить или различить или же указать на то, сколько их. Однако в рамках представлений *ЛФТ*, хотя об этом нельзя сказать, это можно показать. Поэтому Витгенштейн принимает следующее соглашение: «Тождество объектов я выражаю тождеством знаков, а не с помощью знака тождества. Различие объектов – различием знаков» [4, 5.53]. Если нужно указать на количество объектов, то для этого используется соответствующее количество имён. Например, «то, что должна высказать аксиома бесконечности, могло бы выразиться в языке тем, что имеется бесконечно много имён с различным значением» [4, 5.535]. Символическая система должна показывать то, что нет необходимости утверждать. Псевдопонятия должны быть исключены надлежащим способом записи.

Наконец, в-третьих, позитивные идеи Витгенштейна, высказанные в двух первых пунктах, тесно взаимосвязаны с критикой логицистской системы *PM*, в которой широко используются утверждения о существовании, тождестве и различии объектов. Так, в *PM* утверждение о существовании различных вещей используется при установлении свойств отдельных чисел, при этом употребляется знак тождества, с помощью которого устанавливается количество объектов. Выражения типа “$(\exists x, y, z \ldots) . x \neq y . x \neq z . y \neq z \ldots$” в системе *PM* являются вполне обычными и указывают на существование определённого количества различных объектов в зависимости от количества используемых переменных. Это указание, например, в качестве гипотезы повсеместно используется при введении чисел натурального ряда, включая утверждение ***АБ*** о том, что существует класс объектов, больший любого заданного класса [39. Т. 2. С. 58–114]. Кроме того, в качестве гипотезы в *PM* повсеместно также используется выражение ‘$(\exists x) . (x = x)$’, с точки зрения Рассела, сообщающее, что объекты вообще существуют. Рассел считает его аналитическим, т.е. логическим по природе, и применяет там, где нужно нечто сказать об объектах и образуемых объектами классах[1].

---

[1] Такой подход совершенно расходится с точкой зрения Витгенштейна на природу логики. Уже в подготовительных материалах к *ЛФТ*, например, он утверждает, что «логика должна заботиться о себе сама» [5. С. 30], и далее: «Вопрос о возможности предложений существования стоит в логике не в середине логики, а в самом начале. Все проблемы, которые привходят с аксиомой бесконечности, должны быть решены уже в предложении ‘$(\exists x) . (x = x)$’» [5. С. 41]. Интерпретируя этот пассаж, Р. Фогелин, и с ним нельзя не согласиться, в частности, пишет: «Витгенштейн имеет ряд возражений на то, что ‘$(\exists x) . (x = x)$’ вдруг оказывается теоремой логики. Прежде всего, он считает, что логика автономна, логические проблемы никогда не устанавливаются со ссылкой на независимую реальность. Однако если истины логики могли бы нечто утверждать о существовании, тогда всё выглядело бы так, что предложения логики зависят от положения вещей в мире» [55. P. 170].

Надо сказать, что во *Введении*, которое Рассел написал к *ЛФТ*, он соглашается как с критикой, так и с позитивными предложениями Витгенштейна. Он, в частности, пишет:

> Отказ от тождества устраняет один из способов, с помощью которого можно было бы говорить о совокупности всех вещей; и будет показано, что любой другой способ, который может быть предложен, столь же ошибочен; по крайней мере так утверждает Витгенштейн, и, я думаю, правильно утверждает. Это приводит к утверждению, что “объект” есть псевдопонятие. Сказать “*x* есть объект” – значит ничего не сказать. Из этого следует, что мы не можем высказывать таких положений, как “в мире больше чем три объекта” или “в мире бесконечное число объектов”. Объекты могут упоминаться только в связи с каким-либо определённым свойством. Мы можем сказать: “Существует больше трёх объектов, которые суть люди”, или “Существует больше трёх объектов, которые красны”, так как в этих положениях слово “объект” в языке логики может быть заменено на переменную, причём переменная в первом случае удовлетворяет функции “*x* – человек”, а во втором случае – “*x* – красный”. Но когда мы пытаемся сказать: “Существует больше трёх объектов”, эта подстановка переменной вместо слова “объект” становится невозможной, и предложение поэтому должно рассматриваться как бессмысленное [26. С. 23].

Такое безоговорочное согласие Рассела выглядит крайне странным, поскольку в структуре *PM* возможность различения и отождествления вещей и собственно утверждение об их существовании, помимо указания их возможных свойств, играют крайне важную роль. Кроме того, при всём своём согласии с Витгенштейном Рассел не внёс корректив во второе издание *PM*, которое вышло через несколько лет после *ЛФТ* и учитывало ряд не связанных с *ЛФТ* критических замечаний, решение которых было представлено в *Приложениях*.

Представляется, что такая позиция Рассела связана с двумя противоположными тенденциями. С одной стороны, предлагаемая в *ЛФТ* позиция, казалось бы, позволяла осуществить одну из фундаментальных идей *PM* о сводимости математики к логике, т.е. идею о том, что любое утверждение математики переводимо в утверждение логики, а сама математика есть только развитая логика. С точки зрения программы логицизма, т.е. программы сведения математики к логике, которой придерживается Рассел, любое утверждение о количестве вещей в мире, об их тождестве и различии превосходит возможности логики, которая является сугубо аналитичной и не должна ничего говорить о мире. В этой связи любое утверждение об объектах должно выходить за сферу логики, а значит, превосходить любую систему, которая претендует на то, чтобы утверждать универсальные истины, при этом ничего не говоря о конкретном содержании мира, к которому она может быть применена. Однако в структуре *PM* такие утверждения есть, и они используются при доказательстве важных результатов. В этом случае утверждение об объектах используется в качестве антецедента импликации и рассматривается как предположение только для доказательства данного результата, которое при необходимости может быть отброшено, и, во всяком случае, этот антецедент не должен рассматриваться как логически необходимый. Так, например, в *PM* во всех утверждениях, которые зависят от принятия ***АБ***, сама ***АБ*** рассматривается как гипотеза. В частности, как уже указывалось, в *PM* об аксиоме бесконечности утверждается:

> Это предположение будет приводиться в качестве гипотезы тогда, когда это будет уместно. Ясно, что в логике не найдётся ничего из того, чтобы обосновать его истинность или ложность, и что в нём можно лишь легитимно быть убеждённым или не быть убеждённым, опираясь на эмпирические основания [39. Т. 2. С. 225].

Поэтому для любого результата *T*, доказательство которого требует ***АБ***, в *PM* доказывается не сам результат *T*, а импликация ***АБ*** $\supset$ *T*. Поскольку аксиома бесконечности явно имеет фактический характер, вне зависимости от того, как его трактовать (например, если понятие объект трактовать в физическом смысле, то на вопрос об истинности данной аксиомы можно было бы ответить только с помощью данных физики), все подобные результаты будут выходить за рамки логики [43. С. 202–203]. Поэтому для Рассела предложения Витгенштейна, видимо, выглядят весьма привлекательными. Действительно, если всё, что касается объектов как таковых, показывается особенностями символической записи, тогда отпадает необходимость что-то о них утверждать, т.е. использовать выходящие за рамки логики допущения.

Однако, с другой стороны, предложения Витгенштейна в системе *PM* не так-то просто реализовать. Это связано не только с особенностями принимаемых Расселом и Витгенштейном логических символик, дело в том, что эти символики отражают различные онтологические представления. Так, например, утверждение Витгенштейна, что выражение “Имеется два объекта, которые …” можно выразить через “($\exists x, y$) …” [4, 4.1272] осмысленно только тогда, когда разные имена, которые можно подставить на место переменных в этом выражении, будут обозначать разные объекты. И в системе онтологических представлений Витгенштейна это вполне нормально, поскольку, так как «объект прост» [4, 2.02], то «два объекта различаются только тем, что они разные» [4, 20233], и это различие можно показать употреблением разных имён. Объекты могут обладать всеми одинаковыми свойствами, тем не менее они остаются различными, если употребляются разные имена.

Но в системе *PM* всё обстоит совершенно не так. И это связано с возможностью различения объектов. Если Витгенштейн предполагает, что объекты различны уже тем, что они различны, то Рассел считает, что различие должно выражаться каким-то свойством объектов. А в этом случае употребление различных имён недостаточно, поскольку если все свойства объектов одинаковы, то их невозможно различить, а значит, это один объект, и использование разных имён здесь не поможет. Таким образом, получается, что то, что Витгенштейн стремится показать, в системе *PM* не только сказать, но и показать невозможно.

В данном случае система *PM* исходит из определения Лейбницем тождества неразличимых: два объекта суть один объект, если нельзя указать различающие их свойства. Именно в этом смысле в системе *PM* используется равенство, определение которого говорит, что две вещи неразличимы, если они обладают одинаковыми свойствами (см. выше §1.4.5). Поэтому на различие вещей, если все их свойства совпадают, нужно прямо указывать, поскольку это их различие является отношением, которое необходимо для введения различных объектов. Отсюда вытекает, что в *PM* от выражений вида ‘$x \neq y$’ невозможно избавиться, если нужно принять существование различных объектов, поскольку различие имён в данном случае роли не играет. Это связано с тем, что имена ‘a’ и ‘b’ обозначают один объект, если все свойства, приписываемые объектам a и b одинаковы, поскольку при этом a и b оказываются одним объектом. Очевидно, что здесь подходы Витгенштейна и Рассела различны. В *PM* можно сказать то, чего не может сказать Витгенштейн, а именно, что разные символы могут обозначать один и тот же объект.

И хотя Рассел принимает критику Витгенштенйна, в системе *PM* от выражений тождества и различия объектов, использующих знаки

‘=’ и ‘≠’, не так-то просто избавиться, поскольку там заложена определённая онтологическая идея. Объекты не просто различны, различие проявляется в определённых свойствах этой системы. В *ЛФТ* Витгенштейн предлагает способ перевода выражений со знаком ‘=’ из *PM* в собственную систему [4. 5531–5532], основанную на предлагаемом им соглашении о том, что тождество объектов должно выражаться тождеством знаков, а различие объектов – различием знаков [4, 5.53]. Однако, как было показано выше (§ 3.2), воплощение этой идеи уже на уровне тех утверждений, которые не вызывают сомнения в своей логической природе, связано со значительными затруднениями и вряд ли может быть реализовано в полной мере.

И связано это прежде всего с тем, что в *PM* с помощью знака равенства выражаются действительно весьма важные положения. Так, в рецензии на *ЛФТ* Рамсей указывает:

> Отбрасывание равенства может иметь серьезные последствия для теории множеств и кардинальных чисел. Например, едва ли правдоподобно заявление, что два класса равночисленны, только если существует однозначное соответствие, чьей областью является один класс, а конверсной областью – другой, если такие отношения не могут быть построены посредством равенства [22. С. 75].

Это замечание действительно существенно, поскольку через взаимно однозначное соответствие в системе *PM* вводится понятие кардинального числа как класса всех равночисленных классов. Можно указать на то, что Витгенштейн в *ЛФТ* обходит это возражение, предлагая собственное определение кардинального числа как показателя логической операции [4. 6.021], что приводит его к выводу, что «теория классов в математике совершенно излишня» [4. 6031]. Но это указывает также и на то, что представление о соотношении логики и математики у Витгенштейна совершенно иное, чем у Рассела, что, прежде всего, связано с пониманием специфики математических утверждений, которые в *ЛФТ* рассматриваются как уравнения, касающиеся знаков и поэтому позволяющие из одних утверждений, не принадлежащих математике, получать другие утверждения, точно так же не принадлежащие математике (подробнее см. выше § 3.1). Подход Витгенштейна к утверждениям математики кажется несколько упрощённым, но он импонирует Рамсею, который в той же рецензии пишет, что предложения математики, согласно Витгенштейну,

> являются равенствами, получаемыми написанием ‘=’ между двумя пропозициями, которые могут быть подставлены вместо друг друга. Я не вижу, как этот подход предполагает охватить всю математику, и он, очевидно, неполон, поскольку существуют также неравенства, которые трудно объяснить. Легко, однако, заметить, что ‘Я имею более двух пальцев’ не предполагает значимости ’10 > 2’, ибо, если вспомнить, что различные знаки должны иметь различные значения, оно просто представляет собой ‘($\exists$ *x*, *y*, *z*) : *x*, *y*, *z* есть мои пальцы’ [22. С. 76].

Таким образом, Рамсей согласен, что нечто можно показать особенностями символической системы, хотя, с другой стороны, он сомневается в том, что всё, что можно выразить средствами *PM*, укладывается в соглашение, принимаемое Витгенштейном в *ЛФТ*.

Размышления над слабыми и сильными сторонами позиций *PM* и *ЛФТ* в конечном счёте приводят Рамсея к созданию собственной теории тождества (см. выше § 3.6), на основании которой переосмысливается характер ***АБ***, которая начинает рассматриваться как тавтология, т.е. как предложение логики (см. ниже § 4.5). Однако эта оригинальная теория выросла из не менее интересной попытки Рамсея синтезировать идеи Рассела и Витгенштейна, которая представлена в рукописях «Бесконечность» и «Количество вещей в мире» [81], анализ которых помогает многое прояснить как в генезисе теории, так и в её окончательном варианте, использующем экстенсиональные функции.

4.3. Рамсей о трансцендентальном смысле аксиомы бесконечности

В рукописи Ф.П. Рамсея, озаглавленной «Бесконечность», есть следующий пассаж:

> Аксиома бесконечности у Рассела состоит в том, что существует бесконечное число различимых вещей. Это – эмпирическая пропозиция и, следовательно, не может входить в математику. 2. Аксиома бесконечности имеет также трансцендентальную интерпретацию (опустим ‘различимые’ или, скажем, бесконечность атомарных пропозиций). Интерпретируемая таким образом, она входит в философию математики, поскольку много важных вопросов включает её истинность [81. P. 179].

Здесь возникают две проблемы, которые следует разобрать. Во-первых, что означает применительно к аксиоме термин эмпирический, особенно если это касается математической аксиомы, пусть и в трактовке Рассела? Во-вторых, в каком смысле здесь следует понимать термин трансцендентальный и что он может дать для понимания позиции самого Рамсея?

В интерпретации Рассела, которая заключается в том, что математика есть развитая логика, понятия математики должны переводиться в термины логики и, таким образом, утверждения математики становятся утверждениями логики. При этом логика сохраняет аналитический характер, т.е. не выходит за рамки тождественных преобразований в структуре знаковой системы. Таковыми должны, в конечном счёте, быть и утверждения математики. Но если мы обращаемся к ***АБ***, утверждающей, что существует бесконечное число вещей в мире, всё оказывается не так просто. Как показывает Рассел, то, что содержательно утверждает ***АБ***, не может быть введено чисто аналитически, поскольку приводит к логическим противоречиям (в частности, к *парадоксу Рассела*). Не может ***АБ*** основываться и на содержательном смысле самой идеи бесконечности, как бы она ни понималась. Рассел утверждает, что содержание данной идеи не может быть обосновано ни *a priori*, ни *a posteriori*, поскольку первое не состоятельно, а второе не убедительно. Априорные конструкции, вводящие идею бесконечности, грешат либо смутностью употребляемых при этом понятий, либо неправильно трактуемыми отношениями между понятиями и подпадающими под эти понятия объектами. Неубедительность апостериорного введения идеи бесконечности Рассел видит в том, что в этом случае она становится предметом веры, а не рационального доказательства (см. выше § 4.1). Поэтому Рассел принимает ***АБ*** в качестве содержательного условия доказательства некоторых математических утверждений, которые вполне могли бы быть другими, если бы оказалось, что другим является мир, для описания которого предназначена его система. И здесь нетрудно понять, почему ***АБ*** в этом смысле Рамсей считает эмпирической. Понимаемая таким образом, она является эмпирически истинной или эмпирически ложной и, следовательно, не может входить в математику.

Более того, речь у Рассела идёт о различимых вещах, поскольку любое утверждение о множественности объектов предполагает наличие у них различных свойств, так как принимаемый Расселом принцип тождественности неразличимых Лейбница приводит к тому, что вещи, у которых все свойства одинаковы, являются не множественностью, но одной вещью. Однако нет ничего логически противоречивого в том, чтобы вещи обладали всеми одинаковыми свойствами, но при этом были разными вещами. Таким образом, ***АБ*** у Рассела оказывается эмпирической как в силу понимания характера вещей, о количестве которых она утверждает, так и в силу характера её верификации. Рамсей чётко осознаёт эти особенности подхода Рассела, и именно поэтому ***АБ*** в такой интерпретации считается Рамсеем эмпирической.

Трансцендентальный смысл ***АБ***, с которым, как полагает Рамсей, связаны основные вопросы философии математики, требует более детального рассмотрения. И здесь, прежде всего, следует указать, что ‘трансцендентальное’ в понимании Рамсея основано на утверждении из *ЛФТ*: «Логика не теория, а отражение мира. Логика трансцендентальна» [4. 6.13]. С точки зрения Витгенштейна, любая знаковая система обладает двумя особенностями. С одной стороны, она что-то говорит, с другой стороны, она нечто показывает. Показывает сама структура языка, говорит же то, что выражается в рамках этой структуры. В этом смысле трансцендентальность логики заключается в том, что логика, как наиболее адекватное выражение структуры языка, ставит границу осмысленного и бессмысленного. То, что укладывается в рамки структуры, – осмысленно (т.е. может быть истинным или ложным), то, что превосходит эти рамки, – не просто ложно, но бессмысленно в силу того, что не может быть выражено.

Термин «трансцендентальный» здесь используется не в смысле И. Канта, поскольку речь в *ЛФТ* идёт исключительно о внеличностной репрезентации мира. Как утверждает Витгенштейн, субъект не обнаруживает себя в мире, но является его границей [4. 5.632]. Трансцендентальность логики заключается в том, что структура языка задаёт условия возможности осмысленности того, что в нём может быть выражено. При этом условия возможности сами не выражены в языке, они показаны необходимыми чертами используемых знаков. Как считает Витгенштейн: «То, что *может* быть показано, *не может* быть сказано» [4. 4.1212], поскольку показанное является условием возможности того, что можно сказать. Добавим, однако, и то, что нечто осмысленно сказать нельзя, если условия возможности этого высказывания не заложены в особенностях, показываемых самой знаковой системой. Особенности знаковой системы показывают то, что есть в мире, но ничего не говорят, но если нечто в знаковой системе можно сказать осмысленно, то черты этой знаковой системы должны показать саму эту возможность. Поэтому если то, что утверждает ***АБ***, имеет хоть какой-то смысл, то черты знаковой системы должны содержать возможность этого смысла.

В этом направлении развивается аргументация Рамсея. В частности, он утверждает: «Мы можем говорить, что сама идея бесконечности доказывает её существование» [81. P. 178]. Здесь, конечно, речь идёт не о количестве вещей в действительном мире, но лишь о свойствах знаковой системы. Если мы осмысленно можем говорить о бесконечности, то в самой знаковой системе эта возможность уже должна быть заложена. Если бы это было не так, то трансцендентальная ложность ***АБ***, т.е. невозможность выразить её средствами знаковой системы, приводила бы к противоречивости, или даже к бессмысленности, при попытке выразить её эмпирически: «Если она ложна трансцендентально, она – самопротиворечива эмпирически» [81. P. 178]. Другими словами, невозможность знаковой системы показать, что о бесконечности можно и нужно говорить, приводит к тому, что любые эмпирические утверждения о бесконечном количестве вещей в мире становятся бессмысленны, поскольку средствами знаковой системы невозможно выразить то, что ***АБ*** могла бы иметь в виду.

В данном случае речь идёт не о фактической истинности ***АБ***. Её трансцендентальная истинность должна демонстрироваться свойствами знаковой системы, предполагающей выразить то, что подразумевает любое утверждение о бесконечности. Её трансцендентальная истинность предполагала бы возможность как фактической истинности, так и фактической ложности, т.е. осмысленность подобных утверждений. Но её трансцендентальная ложность приводила бы только к тому, что знаковая система, при попытке выразить идею бесконечности, оказывалась бы самопротиворечивой. Таким образом, в трансцендентальном смысле идея бесконечности означает то, что если мы можем мыслить бесконечность, или, лучше сказать, можем иметь её идею, то мы можем её выразить. И возможность её выразить есть трансцендентальное условие, заложенное в знаковой системе. Даже если нет никаких эмпирических доказательств того, что ***АБ*** подтверждается эмпирически, её трансцендентальную истинность обеспечивает сама возможность содержательной формулировки. Здесь Рамсей приводит доказательство *reduction ad absurdum* к предыдущему аргументу, которое от эмпирической несамопротиворечивости приводит к трансцендентальной истинности, поскольку эмпирическая осмысленность предполагает возможность знаковой системы эту осмысленность выразить или, точнее, показать в свойствах самой знаковой системы:

> Ясно, что может существовать ∞ атомов и независимо от того, является ли это эмпирическим фактом. И эта возможность влечёт ∞ объектов, как если бы они были возможными атомами. Таким образом, ясно, что трансцендентально взятая аксиома бесконечности является истинной, хотя эмпирически она сомнительна [81. P. 178].

Эмпирическая сомнительность не приводит к трансцендентальной ложности, поскольку трансцендентальные условия истинности у Рамсея зависят исключительно от возможности знаковой системы показать, что может быть осмыслено, а что – нет. Если идея бесконечности и сомнительна в смысле Рассела, поскольку предполагается, что никоим образом невозможно доказать бесконечность вещей в мире, то это отнюдь не означает, что она сомнительна вообще, поскольку её смысл может быть выражен в рамках знаковой системы. И именно знаковая система должна показать, что если о бесконечности можно говорить, то уже возможность это сказать должна, так или иначе, быть.

Ещё более определённо о трансцендентальном смысле идеи бесконечности Рамсей высказывается в рукописи «Количество вещей в мире», где говорит:

> Просто сама идея бесконечности доказывает её существование. Здесь мы должны избежать неправильного понимания. Значки на бумаге, сделанные математиками, имеющими дело с бесконечностью, будучи конечными по числу, не доказывают существование бесконечности; но осмысленность этих значков – и мы знаем, что они являются осмысленными, понимая их, – доказывает то, что нам требуется [81. P. 175].

Сама возможность говорить о бесконечности должна указывать на то, что, в том или ином смысле, идея бесконечности включена в способ рассуждения. Символические приспособления в виде использования переменных, принятых в математике, не играют особой роли. Точно так же можно использовать знак ∞, но сам «знак ∞ не доказывает ничего» [81. P. 178]. Использование переменных, так же как использование этого знака, указывает только на то, что идею бесконечности можно осмысленно употреблять.

В конечном счёте, в пользу осмысленности употребления идеи бесконечности Рамсей приводит два аргумента, которые можно обозначить как формальный и содержательный. Формальный аргумент связывается с возможностью построения рефлексивных функций, содержательный – с возможностью осмысленных утверждений о физическом мире. Осмысленность формального введения идеи бесконечности Рамсей основывает на том, что

> трансцендентальную интерпретацию аксиомы бесконечности можно прояснить, заметив, что «аксиома бесконечности» = «‘существует рефлексивная функция’», т.е. аксиома бесконечности относится к тому же порядку, что и математические пропозиции [81. P. 179].

И на существование таких рефлексивных функций указывает уже способ записи логических операций, повторное применение которых к самим себе приводит к тому же самому результату, но имеет другой смысл (в частности, отрицания как самого по себе, так и в возможной комбинации с другими логическими операциями). Так, например, Рамсей утверждает:

> Аргумент в пользу существования бесконечности может быть основан на природе нашей логической нотации. Осмысленность ‘$\sim p$’ зависит от её конструируемости согласно правилу выражения природы отрицания, согласно которому бесконечность форм можно сконструировать ‘$\sim p$’, ‘$\sim\sim\sim p$’, ‘$\sim p.\vee.\sim p$’ … Таким образом, бесконечность предполагается нашей нотацией; и поскольку наша нотация осмысленна, актуальная бесконечность должна быть. Опять-таки аргумент не заключается в том, что существование значков $\sim$, $\vee$ и т.д. доказывает существование бесконечности, но это доказывается осмысленностью этих значков [81. P. 176].

В частности, на природе подобной логической нотации основывается способ введения Витгенштейном понятия натурального числа как показателя степени операции [4. 6 – 6.03]. И, как считает Рамсей, если подобный способ введения чисел имеет хоть какой-то смысл, то должна иметь смысл и ***АБ***:

> Если что-то есть в идее числа у Витгенштейна, бесконечный ряд чисел был бы доказан сразу же возможностью отрицания бесконечность раз [81. P. 179].

Содержательный аргумент основан на осмысленности допущений, которые могут приниматься в рамках физической теории:

> Я могу сказать: "Существует бесконечное число атомов". Это может быть ложным, но это, возможно, истинно и, следовательно, осмысленно. И если это что-то подразумевает, то должно быть бесконечное число вещей. Таким вещам не обязательно быть материальными объектами, поскольку для обнаружения действительной формы пропозиции требуется анализ, в который мы не можем здесь вдаваться, поскольку это увело бы нас в сложнейшие метафизические вопросы. Но, грубо говоря, это включает возможность сказать: 'Здесь есть атом' о бесконечности 'здесь' [81. P. 175].

Таким образом, в пользу осмысленности употребления идеи бесконечности Рамсей указывает на несамопротиворечивость как допустимых формальных построений, так и гипотетических предположений о содержании мира. Но поскольку и то, и другое – возможно, оправдан и трансцендентальный аргумент, который сводится к следующим шагам:

1. Осмысленность идеи бесконечности влечёт трансцендентальную истинность ***АБ***, поскольку она должна демонстрировать свойства знаковой системы, в которой идея бесконечности может быть выражена.

2. Идея бесконечности осмысленна, в пользу чего свидетельствуют приведённые выше формальный и содержательный аргументы, т.е. в рамках принятой знаковой системы эти аргументы могут быть выражены как истинные или ложные утверждения.

Следовательно,

3. ***АБ*** – трансцендентально истинна, т.е. её истинность должна демонстрироваться особенностями знаковой системы, которая предполагает разговор о бесконечности ввиду осмысленности приводимых аргументов.

У Рамсея трансцендентальное понимание ***АБ*** позволяет придать ей чисто логический характер как условия возможности любого содержательного рассуждения, в отличие от Рассела, у которого, так или иначе, речь о бесконечности идёт в содержательном смысле. Все мотивы Рассела оправдывают введение ***АБ*** *post factum*. Он рассуждает следующим образом: *a*) необходимо получить нечто; *b*) без ***АБ*** этого получить невозможно; *c*) следовательно, нужно ввести её в качестве условия. В этом случае ***АБ*** выступает в качестве условия *sine qua non*, условия, без которого невозможно получить некоторые требуемые следствия. Но это условие не имеет трансцендентального характера, поскольку не является исходной предпосылкой, но привлекается лишь для доказательства ряда результатов.

Однако для Рамсея трансцендентальный смысл ***АБ*** заключается в том, что мы не должны приходить к ней *post factum* из-за невозможности что-то без неё доказать. Её трансцендентальный смысл заключается как раз в том, что ряд вопросов мы без неё просто не можем поставить, т.е. сама возможность постановки вопроса о бесконечности должна заключаться в особенностях знаковой системы, где она ставится. Возьмём, к примеру, эвклидову геометрию, многие доказательства которой предполагают ***АБ***. Если бы эта геометрия в точности прилагалась к реальности, то тем самым ***АБ*** была бы доказана. Однако ясно то, что эвклидова геометрия «применяется к реальности лишь приблизительно» [81. P. 180], а значит, условия, при которых она считается внутренне согласованной, предполагаются способами её выражения, но не её соответствием с действительностью. То есть раз уж геометрия Эвклида есть, то бесконечность должна предполагаться в способах эту геометрию выразить. В этом заключается суть аргументации Рамсея. В отличие от Рассела, который в перспективе имеет действительный мир, пытаясь связать с логикой вопрос: «Бесконечен ли действительный мир?», Рамсея интересует проблема: «Как возможна ***АБ***?». Если для Рамсея ***АБ*** есть условие возможности самой постановки вопроса о бесконечности, то для Рассела она является условием его решения.

Таким образом, трансцендентальный характер этой проблемы, связанный с выразительными возможностями знаковой системы, радикально отличается от содержательного вопроса Рассела. Важно только предложить способ реализации этой возможности, что равно нахождению такого символического выражения, который был бы чисто формальным. Один из способов такого представления Рамсей предлагает в рукописи «Количество вещей в мире», суть которого сводится к следующему: 1) используется изобразительная функция тавтологий, которые, вслед за Витгенштейном, Рамсей рассматривает как способ демонстрации свойств знаковой системы; 2) тавтологии ничего не говорят, но показывают свойства знаковой системы, в которой нечто можно сказать о мире; 3) используя тавтологии, можно показать и количество вещей в мире, описываемом в определённой знаковой системе. В следующем параграфе рассмотрим подробнее, как это представлено в данной рукописи, поскольку, хотя этот подход и не нашёл применения в *ОМ*, сам по себе он представляет достаточный интерес. С одной стороны, предложенный подход позволяет прояснить мысли Витгенштейна в *ЛФТ*, а, с другой стороны, он многое объясняет в трактовке Рамсеем своих собственных идей, которые привели его к экстенсиональным функциям (см. § 3.6) и использованию их в интерпретации ***АБ***.

4.4. Рамсей о количестве вещей в мире

Особый интерес к подходу Рамсея в рукописи «Количество вещей в мире» связан с тем, что он пытается учесть двойственность позиции Рассела. Так, он утверждает, что если мы пытаемся говорить об объектах, то это приводит

> к трудной и важной проблеме об уместности в логике и математике вопроса о количестве вещей в мире. То, что это в некоторой степени уместно, проявляется в *Principia Mathematica*, где предполагается, что существует одна вещь (хотя м-р Рассел впоследствии заявляет, что это – дефект логической чистоты системы), и где для доказательства обычных математических теорем требуется аксиома бесконечности. Конечно, подразумевается, что эта аксиома утверждает существование бесконечного количества вещей, но фактически, с точки зрения определения тождества в *PM*, она утверждает другое, она утверждает, что существует бесконечное количество различимых вещей [81. P. 170].

При всей привлекательности идей *ЛФТ* для Рамсея, который впоследствии будет говорить, что, используя предложения Витгенштейна, он нашёл, как освободить *PM* от серьёзных возражений в отношении вопроса о сводимости математики к логике [17. С. 15], он чётко фиксирует различие онтологических предпосылок, поскольку Расселу необходимо говорить о различимых вещах, тогда как Витгенштейну – нет. Представляется, таким образом, что в попытке синтезировать идеи Рассела и Витгенштейна перед Рамсеем стоит две проблемы. С одной стороны, можно ли, учитывая критику и предложения Витгенштейна, сохранить ‘=’ и ‘≠’ для того, чтобы иметь возможность учесть количество различимых вещей в мире. Даже если использовать разные имена для различных объектов, можно ли указать, сколько их, и вообще, можно ли поставить такой вопрос в рамках *PM*, если преобразовать её с точки зрения *ЛФТ*. С другой стороны, поскольку разговор о количестве разных вещей выходит за рамки логики и аналитически понимаемой математики, можно ли модифицировать систему *PM* так, чтобы утверждения о количестве вещей стали предложениями логики или тавтологиями в смысле *ЛФТ*. Возможность сказать о количестве вещей непосредственно затрагивает природу логики, и если из одной только формы высказывания следует некоторое утверждение об онтологии, то это говорит о том, что логика может и должна учитывать онтологические предпосылки, не утрачивая при этом аналитического характера.

Начнём с первой проблемы. Сложность здесь заключается уже в том, что любая попытка сказать о количестве вещей в мире сталкивается с тем, что в системе *ЛФТ* подобные попытки объявляются бессмысленными псевдопредложениями не только потому, что здесь используется псевдопонятие *объект*, как указывалось выше, но и с тем, как Витгенштейн понимает высказывания, сообщающие подлинный смысл. Дело не только в том, что в *PM* используются выражения с псевдопонятиями, важно также и то, что в *ЛФТ* подлинными высказываниями объявляются только те, что являются функциями истинности элементарных высказываний, т.е. высказываний, имеющих форму вида ‘fa’, ‘$f(a,b)$’ и т.д. [4. 5], из которых утверждения вида ‘$\exists x \, . \, fx$’ или ‘$\exists x \, . \, f(x,b)$’ и т.д. можно получить посредством логических преобразований, использующих исключительно истинностные функции (подробнее см. § 1.2). В этом случае, как видно, речь идёт не о количестве объектов, но только об объектах, имеющих определённое свойство. Более того, посредством преобразований, допустимых в *ЛФТ*, никакого утверждения собственно об объектах получить невозможно. То есть любое утверждение, которое выражается с использованием квантора существования, значимо не само по себе, но только через свойство, которым обладают вводимые посредством квантора объекты. Поэтому Витгенштейн и может утверждать, что “Имеется два объекта, которые …” можно выразить через “$(\exists x, y)$ …” [4. 4.1272]. С этим согласен и Рамсей:

> Ясно, что “Существует столько-то вещей”, не является пропозицией, ибо она не является функцией истинности элементарных пропозиций [81. P. 171].

В этом отношении выражения, допустимые в *PM*, вроде ‘$(\exists x) \, . \, x = a$’ и ‘$(\exists x) \, . \, x \neq a$’, где первое выражение говорит, что существует один объект, а второе – что существует более одного объекта, лишены смысла, поскольку, с точки зрения Витгенштейна, «в правильной логической символике даже не могут быть написаны» [4. 5.534]. Однако Рамсей предлагает интерпретировать подобные выражения таким способом, чтобы они имели видимость смысла, переписывая их не просто как утверждение о существовании объектов, но как утверждения, приписывающее объектам некоторое свойство. В качестве формального выражения такого свойства предлагается ‘Tx’, являющееся сокращением тавтологии вида ‘$\varphi x \vee {\sim}\varphi x$’, как Рамсей поступает и ранее (см. § 3.2). В этом случае ‘$(\exists x) . x = a$’ переписывается как ‘$(\exists x) . x = a \cdot Tx$’ и трактуется как тавтология, а ‘$(\exists x) . x \neq a$’ переписывается как ‘$(\exists x) . x \neq a \cdot Tx$’ и трактуется как сумма тавтологий ‘Tx’ для всех значений x, отличных от a, при этом «если значения x, отличные от a, существуют, то ‘$(\exists x) . x \neq a$’ является тавтологией, в противном случае является бессмыслицей» [81. P. 170]. С точки зрения Рамсея, такой ход вполне допустим, поскольку «если мы можем говорить, что существует столько-то вещей, выполняющих $\varphi\hat{x}$, почему бы тогда не говорить, что существует столько-то вещей, выполняющих $T\hat{x}$?» [81, P. 171]. Действительно, возьмём выражение “Существует по крайней мере две вещи, выполняющие $\varphi\hat{x}$”, что формально можно записать как

“$(\exists x,y) . x \neq y \cdot \varphi x \cdot \varphi y$” или “$(\exists x) : \varphi x : (\exists y) . y \neq x \cdot \varphi y$”.

Сходным образом можно записать, что существуют по крайней мере две вещи, добавив к этому, что они выполняют $T\hat{x}$. Т.е. получится выражение

“$(\exists x,y) . x \neq y \cdot Tx \cdot Ty$” или “$(\exists x) : Tx : (\exists y) . y \neq x \cdot Ty$”.

И, как утверждает Рамсей, это выражение

> чтобы оно ни означало, является тавтологией; а если оно не означает ничего, то ничего не означает и предыдущая пропозиция “Существуют по крайней мере две вещи, выполняющие $\varphi\hat{x}$” [81. P. 171].

Во всяком случае, первое выражение должно выступать условием осмысленности второго, поскольку если осмысленным не будет первое выражение, то осмысленным не будет и второе. Более того, поскольку первое выражение является тавтологией, то оно уже должно подразумеваться любым выражением, имеющим форму второго, поскольку любое выражение вида “($\exists x$) φx” подразумевает выражение вида ‘($\exists x$) . $\varphi x \vee \sim\varphi x$’. Так, например, утверждение “Снег бел” подразумевает осмысленность выражения “Снег бел или не бел”. Видимо, в этом смысле Рамсей полагает, что выражение Витгенштейна

> “Существует *n* вещей, таких что …” предполагает не только для своей истинности, но и для своей *осмысленности* то, что мы пытаемся утверждать посредством “Существует *n* вещей” [81. P. 171][1].

Таким образом, учитывать количество объектов и их свойства, с точки зрения Рамсея, в символической системе вполне возможно. Другое дело, как это нужно интерпретировать.

Рамсей придаёт утверждениям о вещах некоторый смысл, но возникает проблема, как о них можно говорить, если ‘говорить’ понимается в смысле Витгенштейна. То есть возникает проблема, какую роль они могут играть в символической системе. Действительно, выражения вроде “Существует столько-то вещей” не являются пропозициями, т.е. не являются функциями элементарных пропози-

---

[1] Здесь может показаться, что у Рамсея и Витгенштейна речь идёт о разных проблемах. Это связано с тем, что Витгенштей в *ЛФТ* говорит не столько об *n* объектах, сколько об *объектах*. Так, выражение “Имеются объекты” у Витгенштейна [4, 4.1272] явно отличается от выражений, рассматриваемых Рамсеем. И действительно, когда Рамсей говорит, что “Существует *n* вещей, таких что …” предполагает не только для своей истинности, но и для своей *осмысленности* то, что мы пытаемся утверждать посредством “Существует *n* вещей”, это уже подразумевает, что имеется некоторое количество различных объектов. Однако то, что в системе *ЛФТ* в определённом смысле всё-таки можно говорить о количестве объектов, подтверждает сам Витгенштейн. В печатном экземпляре *ЛФТ*, принадлежащем Рамсею (а Рамсей принимал непосредственное участие в переводе и издании *ЛФТ* на английском языке, причём это участие было основным в том смысле, что терминология и основные идеи немецкого текста *ЛФТ* в английском варианте в конечном счёте были представлены в версии Рамсея, который провёл значительное время в беседах с Витгенштейном, обсуждая основные идеи *ЛФТ* [14. С. 140]), Витгенштейн в английском тексте, наряду с другими поправками, сделал следующее замечание: «“Существует *n* вещей, таких что …” предполагает для своей *осмысленности* то, что мы пытаемся утверждать посредством “Существует *n* вещей”». К. Леви, который провёл детальный анализ замечаний Витгенштейна в данном тексте, принадлежащем Рамсею и скорректированном Витгенштейном, считает, что данное замечание Витгенштейн предполагал вставить в следующее издание *ЛФТ* между пятым и шестым параграфом афоризма 4.1272 [63. P. 421]. Так и Рамсей обсуждает афоризм *ЛФТ*: «“Имеется два объекта, которые …” можно выразить через “($\exists x, y$) …”» [4. 4.1272] в форме “Существует *n* вещей, таких что …”, сообразуясь с этим замечанием Витгенштейна.

ций ни в смысле Витгенштейна, ни в смысле Рамсея, даже несмотря на то, что Рамсей, как указано выше, придаёт им некоторый смысл. Однако, как говорит Рамсей,

> нас спросят, если "Существует столько-то вещей" не является пропозицией, как мы вообще можем обсуждать этот вопрос? Ответ не труден; мы рассматриваем не наше мышление, язык и логику, которые охватывают весь мир, но гипотетический язык и логику, охватывающую некоторую часть мира. Таким образом, мы можем вообразить существование, где 'все' охватывает не все вещи, но только их некоторое множество; количество этого множества будет тогда количеством вещей в его мире, относительно которого мы в нашем языке можем образовать пропозиции, хотя он в своём – не может. И так мы можем конструировать различные логические языки, применимые к этим различным мирам; мир может состоять из одной вещи, из двух вещей и т.д. [81. P. 171].

Это утверждение Рамсея необходимо прояснить. Для этого вернёмся к выражениям вида '$(\exists x) . x \neq a \cdot \varphi x$'. Как считает Рамсей, выражение вроде '$(\exists x) . x \neq a \cdot \varphi x$', если существует только одна вещь в мире типа a, является бессмысленным. Точно так же бессмысленным является выражение '$(\exists x) . x \neq a \cdot x \neq b \cdot \varphi x$', если существует только две вещи и т.д. Однако возникает проблема, как это можно выразить в символической системе, если выражения, утверждающие количество вещей в мире, Витгенштейн объявляет псевдопредложениями. Если воспользоваться соглашением самого Витгенштейна о том, что разные вещи должны обозначаться различными именами, это можно было бы показать различным количеством имён в разных частичных языках. Однако, как считает Рамсей, хотя

> это можно было бы показать числом имён в языке, если бы все объекты имели имена, но, поскольку не все объекты должны иметь имена, эта демонстрация могла бы быть ошибочной [81. P. 172][1].

---

[1] Этот аргумент Рамсея соответствует аргументу Куайна против подстановочной квантификации, которая в отличие от объектной квантификации предполагает, что на место переменных подставляются имена, а не объекты. Возражение Рамсея наиболее очевидно для бесконечных областей, ибо, как пишет Куайн, «в достаточно богатом универсуме существует больше вещей, чем их может быть наименовано, даже если имена бесконечны по числу» [12. С. 167], поскольку множество имён счётно, тогда как, скажем, множество действительных чисел не счётно. Отсюда следует, что уже не всем действительным числам можно приписать имена; «обилие имён не может предотвратить существование безымянных объектов в достаточно богатом универсуме» [12. С.168].

Рамсей согласен с Витгенштейном, что с помощью выражений из *PM* вида ‘$(\exists x) \,.\, x \neq a$’ сказать ничего нельзя. Но это не означает, что в частичном языке ничего нельзя показать с помощью таких выражений. Здесь он использует идею Витгенштейна о различии между тем, что может быть сказано в языке, и тем, что может быть показано языком. Но он не согласен с тем, что на количество вещей в мире можно указывать только наличием разных имён. Для этого могут использоваться также тавтологии. Здесь необходимо напомнить, что с точки зрения *ЛФТ* тавтологии ничего не говорят о мире, поскольку не являются предложениями языка, сообщающими некоторое содержание. Последние характеризуются тем, что обладают возможностью быть истинными или ложными, и связано это с тем, что «истинным или ложным предложение может быть только потому, что оно является образом действительности» [4, 4.06]. Но тавтологии не являются образом действительности, у них нет возможности быть истинными или ложными, поскольку они созданы истинными, так как «их истинность узнаётся из одного лишь символа» [4, 6.113]. Но, хотя тавтологии ничего не говорят о мире, они всё-таки нечто показывают. С точки зрения Витгенштейна, тавтологии показывают формальные, логические свойства языка, а через логическую форму (форму отображения), которая у языка и описываемого им мира едина, и свойства мира [4, 6.12].

Но, как считает Рамсей, логику мира можно показать, включая демонстрацию количества вещей. Он предлагает использовать демонстративную функцию тавтологий, расширяя её до демонстрации количества вещей в соответствующем частичном мире. При этом он применяет расширенное понятие тавтологии, использующее предикат ‘Tx’, так, как показано выше. Он пишет:

> В языке, описывающем мир с двумя вещами (two-things-world), мы не можем сказать, “Существует в точности две вещи”; это будет показываться тем, что ‘$(y) : (\exists x) \,.\, x \neq a \cdot Tx$’ является тавтологией, а ‘$(\exists x) \,.\, x \neq y \cdot x \neq z \cdot Tx$’ – бессмысленно [81. P. 172].

Другими словами, выражение вида ‘$(\exists x) \,.\, x \neq a \cdot \varphi x$’ в нашем частичном языке будет иметь значение в мире, состоящем из двух вещей, т.е. будет говорить о каком-то свойстве этих вещей и, значит, быть истинным или ложным только в том случае, если осмысленным будет выражение ‘$(\exists x) \,.\, x \neq a \cdot Tx$’, которое ничего не говорит, но в качестве тавтологии нечто показывает, а именно, то, что вещей в этом мире более одной, и к тому же если бессмысленным будет выражение ‘$(\exists x) . x \neq y \cdot x \neq z \cdot Tx$’, показывающее, что вещей в нашем частичном мире более двух. Таким образом, у Рамсея тавтологичность и бессмысленность определённых выражений показывают то, что Рассел пытается сказать с помощью выражений вида “Существует столько-то вещей”, а Витгенштейн пытается показать наличием определённого количества имён. То есть логику мира можно показать в том числе и тем, что одни утверждения о количестве вещей являются тавтологиями, а другие – противоречиями.

В логике мира, содержащего две вещи, выражение вроде ‘$(\exists x) . x \neq a \cdot x \neq b \cdot \varphi x$’ Рамсей считает бессмысленным, добавим, что, следовательно, бессмысленным является и выражение вида ‘$(\exists x) . x \neq a \cdot x \neq b \cdot Tx$’. Однако, как полагает Рамсей, более удобным было бы придать подобным выражениям некоторое значение, и наиболее подходящим было бы считать их противоречиями. Это связано с несколькими причинами. Во-первых, эти выражения мы не можем рассматривать как, возможно, истинные или ложные, т.к. это не сообразуется со структурой нашего частичного мира, образом которого в этом случае они должны были бы быть. Тавтологии же зарезервированы для противоположного случая. Но других вариантов для осмысленных пропозиций не предусмотрено. Во-вторых, этот ход не приводит к противоречию в рамках системы. Наконец, в-третьих, что является, по-видимому, самым важным, это поможет сравнить логику мира, содержащего две вещи, с логикой миров, содержащих большее количество вещей. Если мы принимаем такое соглашение, то выражение вроде ‘$(\exists x) . x \neq a \cdot x \neq b$’, которое Витгенштейн считает бессмысленным псевдопредложением, приобретает смысл. Будучи переписанным в форме ‘$(\exists x) . x \neq a \cdot x \neq b \cdot Tx$’, оно становится противоречием в мире, содержащем одну или две вещи, и тавтологией в мире, содержащем более двух вещей. Таким образом, используя подобные выражения и трактуя их в стиле *ЛФТ* как предложения логики, т.е. как тавтологии и противоречия, мы можем заместить ими выражения *PM*, утверждающие о существовании определённого количества вещей.

Так, демонстративная функция выражений

‘$(\exists x) . x \neq a \cdot Tx$’ и ‘$(\exists x) . x \neq a \cdot x \neq b \cdot Tx$’,

в мире, содержащем в точности две вещи, где первое является тавтологией, а второе – противоречием, вполне аналогична утверждению

“Существует в точности две вещи”, которое в системе *PM* выражается следующим образом:

$(\exists x,y) \,.\, x \neq y : \sim : (\exists x,y,z) \,.\, x \neq y \cdot y \neq z \cdot z \neq x.$

Однако, несмотря на то, что функции этих выражений и утверждения из *PM* можно трактовать одинаково, тем не менее данные выражения в совокупности не являются утверждением пропозиции “Существует в точности две вещи”. Связано это не с придаваемым им смыслом, но с тем как их нужно понимать. В стиле *ЛФТ* они должны трактоваться как то, что показывает логику мира, а не как то, что говорит о его содержании, как следует понимать эти выражения в *PM*. Поэтому, хотя формула ‘$(\exists x) \,.\, x \neq a \cdot x \neq b$’ и бессмысленна, с точки зрения Витгенштейна, с точки зрения Рамсея, она имеет смысл, и этот смысл можно эксплицировать в мире, содержащем в точности две вещи, хотя он и отличен от смысла пропозиции “Существует в точности две вещи”, поскольку

> если бы эта формула на самом деле выражала такую пропозицию, она имела бы фиксированный смысл, независимо от своей истинности, т.е. от числа вещей в мире, а именно, смысл “что число вещей – два”. Но фактически её *смысл* (не просто *истинность*) зависит от числа вещей в мире; в одном случае она *означает* тавтологию, в другом – противоречие; и не в одном из этих случаев она не означает “Существует две вещи в мире”. Как сказал бы Витгенштейн, число вещей в мире *показывается* определённой символической формой, которая является тавтологией или противоречием; а то, что может быть показано, не может быть сказано [81. P. 173].

Тавтологичность ‘$(\exists x) \,.\, x \neq a \cdot Tx$’ и противоречивость ‘$(\exists x) \,.\, x \neq a \cdot x \neq b \cdot Tx$’ показывают, но не утверждают, что мир, который они описывают, содержит ровно две вещи. Таким способом Рамсей предполагает показать то, что Витгенштейн показывать не собирался, вернее, Рамсей тавтологиями стремится показать то, что у Витгенштейна не предусмотрено.

Подобным образом можно трактовать и другие выражения. Например, осмысленность формулы “$(\exists x,y) \,.\, x \neq y$”, говорящей в *PM*, что существует по крайней мере две вещи, с точки зрения Рамсея, зависит от того, что в мире, содержащем только одну вещь, формула “$(\exists x,y) \,.\, x \neq y \cdot Tx \cdot Ty$” будет противоречием, а во всех остальных – тавтологией. Только тогда будет осмысленной формула “$(\exists x,y) \,.\, x \neq y \cdot \varphi x \cdot \varphi y$”, которая говорит, что эти вещи обладают некоторым свойством. Таким образом, значимость выражений, которые можно оценить как истинные или ложные, зависит от демонстративной функции выражений, показывающих число вещей в мире. Или, если говорить совсем просто, то сама символика, показывая, что некоторые выражения являются тавтологиями, а некоторые – противоречиями, демонстрирует, сколько вещей имеется в мире.

Однако, несмотря на различие в интерпретации, формулы вроде

‘$(\exists x) . x \neq a \cdot Tx$’ и ‘$(\exists x) . x \neq a \cdot x \neq b \cdot Tx$’,

совокупность которых заменяет

$$(\exists x,y) . x \neq y : \sim : (\exists x,y,z) . x \neq y \cdot y \neq z \cdot z \neq x$$

из *PM*, могут с пользой трактоваться так, как если бы вместе они были явным выражением того, что существует только две вещи в мире, поскольку они могут выполнять функцию выражений из *PM*, которые говорят о количестве вещей в мире. Напомним, что Рассел использует их в качестве условий. Так и предлагаемые Рамсеем выражения могут использоваться в качестве условий других выражений в рамках частичных языков. Таким способом можно построить логику частичных языков, и эти логики показывали бы, сколько вещей содержит соответствующий мир. Кроме того, такой подход обеспечивал бы общую логику языков, описывающую мир с произвольным числом элементов. Так, определим подобные формулы как ‘p’, пусть ‘q’ будет произвольной формулой, и рассмотрим формулу ‘$p \supset q$’. Тогда, на основании свойств импликации формула ‘$p \supset q$’ будет тавтологий в любом мире, кроме мира, содержащего в точности две вещи, поскольку ‘p’ в этом случае, согласно принятому соглашению, будет противоречием, а при ложном антецеденте импликация всегда истинна. Если же рассматривается мир, содержащий в точности две вещи, тогда формула ‘$p \supset q$’ сводится к ‘q’, поскольку ‘p’ будет тавтологией, а при истинном антецеденте условия истинности импликации зависят исключительно от консеквента. Ни в первом, ни во втором случае ‘p’ ничего не говорит, но лишь, как сказал бы Витгенштейн, показывает логику мира.

Аналогичные соображения касаются ‘q’. Если ‘q’ является тавтологией в мире, содержащем две вещи, то ‘$p \supset q$’ будет тавтологией в любом мире, и при этом не важно, будет ли ‘q’ тавтологией в каком-то другом мире. Как утверждает Рамсей,

> таким образом, мы можем одновременно развить логики, т.е. тавтологии, всех миров; ибо, когда мы наталкиваемся на выражение, которое является тавтологией только, скажем, в мире, содержащем две вещи, мы ставим ‘*p*’ перед ним в качестве условия и получаем универсально тавтологичное выражение [81. P. 173].

Таким образом, условие ‘*p*’ обеспечивает введение логики мира, содержащего две вещи, в логику любого мира.

Очевидно, что подход Рамсея не приходит в противоречие ни с системой *PM*, ни с системой *ЛФТ*, поскольку основан исключительно на классических свойствах материальной импликации. И действительно, если учесть соглашение Рамсея, совокупность формул

‘$(\exists x) \,.\, x \neq a \cdot Tx$’ и ‘$(\exists x) \,.\, x \neq a \cdot x \neq b \cdot Tx$’

будет играть ту же самую роль, что и выражение

$(\exists x,y) \,.\, x \neq y : \sim : (\exists x,y,z) \,.\, x \neq y \cdot y \neq z \cdot z \neq x$

из *PM*, уже приводимое выше. Все выражения из *PM*, если принять соглашение Рамсея, будут сохранять свою значимость. Аналогичным образом могут трактоваться и выражения из *ЛФТ*, если учесть перевод, предлагаемый Витгенштейном в афоризмах 5.531–5.5321. Правда, при реализации такого перевода Рамсей предполагает, что ‘=’ и ‘≠’ трактуются как обычные предикаты, что позволяет свести выражения о тождестве из *PM* в выражения, допустимые в *ЛФТ* (см. § 3.2). Тогда, например, выражение из *PM* вроде ‘$(\exists x) \,.\, x \neq a$’ (которые в интерпретации Рамсея выглядят как ‘$(\exists x) \,.\, x \neq a \cdot Tx$’) сводятся к ‘$(\exists x) \,.\, x \neq a \vee a \neq a$ ’, что, в свою очередь, сводится к ‘$(\exists x) \,.\, Tx \cdot Ta \,.\vee .\, Ca$’ (где ‘$Ca$’ есть отрицание ‘$Ta$’) и затем, ввиду свойств дизъюнкции, к ‘$(\exists x) \,.\, Tx \cdot Ta$’, что естественно трактовать как просто ‘Ta’. Поэтому проблем в отношении *ЛФТ* не возникает, за исключением того, что, «поскольку мы предполагаем, что различные буквы имеют различное значение, это соглашение возможно только тогда, когда вещей столько же, сколько букв» [81. P. 174]. Но это как раз и соответствует тому, к чему стремится Витгенштейн, принимая соглашение, что различные вещи должны обозначаться разными именами.

Все эти рассуждения, очевидно, применимы к любому частичному миру. В данном случае не важно, сколько именно вещей рассматривается, и не важно, сколько их. Роли не играет, сколько именно вещей показано употреблением знаков. Будет ли их две, три или больше. И здесь, конечно, возникает вопрос, можно ли применить предыдущие рассуждения к числу вещей в мире, которое не ограничивается определённым количеством. Можно. Но каким образом? Речь здесь, конечно, должна идти об ***АБ***. Вопрос о числе вещей в мире имеет значение только в перспективе этого вопроса. Но для Рамсея важно также и то, чтобы этот вопрос решался в рамках программы логицизма. И действительно, подход Рамсея даёт решение основной проблемы, связанной с ***АБ***[1]. Ясно, что с точки зрения представленных выше предложений, ***АБ***, рассматриваемая в виде антецедента импликации, если её можно интерпретировать в качестве тавтологии в бесконечном мире, будет удовлетворять всем тем условиям, которые позволяют ввести её в логику любого мира, без того, чтобы считать её предложением, выходящим за рамки аналитического знания. И хотя на данном этапе Рамсей не может предложить адекватной формулировки такой тавтологии, поскольку отсутствует адекватный логический аппарат, а формулировка из *PM* в силу указанных выше причин не подходит, он всё-таки не сомневается, что, используя теорию формальных рядов или теорию классов, можно найти такое выражение, которое в бесконечном мире было бы тавтологией, а в конечном – противоречием.

Подобное выражение действительно является аксиомой, поскольку его нельзя доказать. Хотя гипотетически конструируемые частичные миры и их логика дают тавтологичные выражения в любом мире, в том числе и в бесконечном, из них нельзя вывести выражение, которое бы соответствовало тавтологии, показывающей бесконечность вещей. Действительно, если мы рассматриваем выражение ‘$p \supset q$’, где ‘p’ относится к миру с заданным количеством вещей, то ‘p’, как показано выше, будет противоречием в любом частичном мире, с количеством вещей, отличным от заданного, а само ‘$p \supset q$’ в силу свойств импликации будет тавтологией. Но из этого нельзя вывести, что одно из таких ‘p’ функционально будет соответствовать ***АБ***, т.е. будет, в соответствии с соглашением Рамсея, показывать бесконечность вещей. Поэтому ***АБ*** должна вво-

[1] Как указывают А. Френкель и И. Бар-Хиллел, эта проблема состоит в следующем: «Для каждого предложения, доказуемого с помощью логических аксиом и аксиомы бесконечности, в самой логике выводима теорема вида импликации, антецедент которой есть эта аксиома, а консеквент – данное предложение. Поэтому для тех математических теорем *T*, доказательство которых требует аксиомы бесконечности *AxInf*, Уайтхед и Рассел смогли доказать не сами по себе *T*, а только импликацию $AxInf \supset T$. Но это, конечно, значит, что ни для какой такой математической теоремы *T* нельзя показать, что она является теоремой логики, пока *AxInf* не взята в качестве аксиомы логики» [43. С. 202].

диться именно как аксиома, но в отличие от системы *PM*, где эта аксиома рассматривается как содержательное утверждение о свойствах реального мира, у Рамсея она рассматривается как предложение логики. И если выражение, соответствующее ***АБ***, можно сформулировать в принципе, то

> всё, что на самом деле можно спросить, заключается в том, является ли определённый знак тавтологией, или же нет – знаком, относительно значения которого мы можем или не можем знать, является ли он тавтологией [81. P. 175].

Поэтому, всё сводится к возможности определённых конструкций, которые должны нечто показать. Вопрос только в том, возможны ли эти конструкции?

Надо сказать, что подход Рамсея к бесконечности существенно отличается от подхода Рассела. Связано это с тем, что в отличие от конструктивного подхода к выражениям, исповедуемого в рамках *PM*, где возможность построения произвольной функции зависит от выразительных возможностей языка, от способности построения определённых выражений, Рамсей относительно природы математических объектов придерживается реалистской позиции. Рассел считает, что, поскольку из особенностей самих выражений нельзя вывести бесконечность объектов в мире, то её можно лишь постулировать в качестве экстралогической аксиомы, которая фиксировала бы объективное свойство реального мира. Иной подход у Рамсея, который утверждает, что функции должны рассматриваться с точки зрения их объективного значения и не должны зависеть от нашей способности их построения в языке (см. § 2.5). Способность построения функций в языке ограничена способностями строящего их логика и не должна сказываться на объективном значении самой функции (см. § 2.3). Если даже у нас не хватает языковых средств для построения выражений о бесконечности объектов, это не означает, что этого нельзя было бы сделать, если бы мы обладали бесконечными возможностями. Как утверждает Рамсей, «сама идея бесконечности доказывает существование бесконечности» [81. P. 175], поскольку заложена в возможности подобных конструкций.

Если не принимать во внимание эпистемологические доводы Рамсея в пользу существования бесконечности вещей в мире, его основной аргумент как раз и связан с объективным значением подобных выражений. Для объяснения вернёмся к примерам. Выше говорилось, что выражение ‘Существует по крайней мере две вещи

x, таких что φx' (или формально "$(\exists x,y) . x \neq y \cdot \varphi x \cdot \varphi y$") будет осмысленным, т.е. будет говорить, что две вещи обладают определённым свойством, только если в мире более одной вещи, на что указывает тавтологичность формулы "$(\exists x,y) . x \neq y \cdot Tx \cdot Ty$". В противном случае она будет бессмысленной или, если принять соглашение Рамсея, противоречивой. И то же самое должно выполняться для любого утверждения об n вещах. Выражение "Существует по крайней мере n вещей x, таких, что φx" будет бессмысленным или противоречивым, если не существует n вещей, что также показывается тавтологичностью соответствующей формулы. Но, как считает Рамсей,

> 'существует бесконечное число x, таких что φx' является логической суммой всех таких пропозиций для различных значений n, и является бессмысленным, если не существует n вещей, каким бы ни было n, или, если бы не существовала бесконечность вещей [81. P. 176].

И поскольку вопрос о существовании бесконечности таких вещей x, которые φx, вполне осмыслен, то вне зависимости от того, можем ли мы актуально сконструировать соответствующую формулу, отвечающую на этот вопрос демонстрацией своей тавтологичности, Рамсей считает, что бесконечность вещей всё равно должна быть. Общий ход своих рассуждений Рамсей суммирует следующим образом:

> Мы показали, как можно скомбинировать изучение логик различных миров введением выражений в качестве гипотез, которые в некоторых мирах являются тавтологиями, в других мирах – бессмысленными, но по определению самопротиворечивыми. Наиболее важной из них является аксиома бесконечности, которая не может быть доказана, поскольку любое доказательство из предыдущих аксиом применялось бы также к конечным мирам, в которых эта аксиома не имела места. Тем не менее в отношении некоторого типа, в нашем собственном мире эта аксиома является определённо тавтологичной, как это показывается тем фактом, что мы можем осмысленно исследовать, существует ли бесконечное число определённого сорта вещей. Конечно, если аксиома бесконечности не имеет силы в нашем мире, она не могла бы иметь силы ни в одном частичном универсуме рассуждения, и мы были бы не в состоянии как-то осмыслить её значение, кроме как принять особое определение. Ясно, что она является тавтологией и подозрительна только потому, что не может быть доказана; но мы явно показали, почему она не

> может быть доказана, а именно потому, что любое доказательство применялось бы также к любому конечному универсуму рассуждения [81. P. 176].

Однако при всей привлекательности идеи Рамсея показывать с помощью тавтологий и противоречий количество вещей в мире, при её реализации очень многое зависит от понимания демонстративной функции предложений логики. Надо сказать, что Рассел, при всём своём согласии с Витгенштейном, не принимает полностью его концепцию различия того, что может быть показано, и того, что может быть сказано языком. В частности, реализованная до конца, эта концепция приходит в противоречие с его доктриной типов, где о выражениях одного типа можно говорить с помощью выражений другого, более высокого типа, а значит, то, что показывается одними выражениями, может быть сказано другими [26. С. 31]. Во всяком случае, если мы принимаем концепцию различия между сказанным и показанным, необходимо обосновать, в какой степени она применима к системам типа *PM*, особенно если учесть, что данная концепция не в последнюю очередь разрабатывалась Витгенштейном не как критика утверждения о количестве вещей в мире, а как критика теории типов. Дальнейшая разработка идеи Рамсея должна была бы продемонстрировать, что концепция различия сказанного и показанного, применяемая в *ЛФТ* тотально, может иметь избирательное применение в отношении отдельных логических идей. Тотальное применение этой концепции не согласуется и с доктриной самого Рамсея, который также разрабатывает теорию типов, хотя и в весьма отличном от Рассела виде (см. § 2.4). Таким образом, представленные выше идеи Рамсея имеют достаточно ограниченное значение, поскольку в реформе использования тождества в выражениях из *PM* зависят от частично принимаемой концепции Витгенштейна, а в интерпретации аксиомы бесконечности от собственного предпочтения концепции реализма в основаниях математики.

4.5. Экстенсиональные функции и аксиома бесконечности

В предыдущем параграфе рассматривалось, каким образом Рамсей, используя демонстративную функцию тавтологий, пытается представить ***АБ*** в качестве логической тавтологии. Несмотря на эвристичность данного подхода, в *ОМ* он от него отказывается ввиду указанных выше затруднений в его последовательной реализации.

В *ОМ* в интерпретации аксиом мультиплитикативности и бесконечности Рамсей основывается на разработанном им понятии математической тавтологии (см. § 3.4) и принципиально экстенсиональной трактовке характера математики (см. § 3.5), используя введённые им экстенсиональные функции. При этом данные аксиомы утрачивают содержательный характер, выражая отношения выводимости в рамках знаковой системы.

Для начала рассмотрим аксиому мультипликативности, которая, напомним, утверждает, что для любого класса неперекрывающихся классов существует класс (т.н. мультипликативный класс), содержащий точно по одному элементу из этих классов. Рамсей считает, что в интерпретации *PM* эта аксиома не является тавтологией, поскольку нет ничего невозможного в том, чтобы она оказалась ложной. Это связано с тем, что в *PM* рассматриваются только определимые классы, и вполне может случиться так, что не существует определяющей функции, которая могла бы задавать некоторый мультипликативный класс. Однако, как утверждает Рамсей, если мы рассматриваем математику сугубо экстенсионально и

> если под ‘классом’ мы подразумеваем, как делаю я, любое множество вещей, однородных по типу и не с необходимостью определимых посредством функции, которая не является просто экстенсиональной функцией, аксиома мультпликативности кажется мне наиболее очевидной тавтологией [17. С. 82].

Конечно, она не является тавтологией в Витгенштейновском смысле, т.е. не обнаруживает необходимую истинность единственно посредством своей формы. Но в интерпретации Рамсея она является математической тавтологией, что, как считает Рамсей, «можно рассматривать как дополнительное преимущество моей теории» [17. С. 83]. При этом он не исключает возможность выведения этой аксиомы с помощью подходящих правил вывода из более простых тавтологий, достаточных для выводимости всей математики. Однако Рамсей вполне осознаёт всю трудность такого предприятия, которое может оказаться для нас невозможным:

> Мне ничуть не кажется неправдоподобным, чтобы существовала тавтология, которая формулировалась бы в конечных терминах и чьё доказательство тем не менее было бы бесконечно сложным и, следовательно, для нас невозможным [17. 83].

Для Рамсея это кажется вполне очевидным ввиду экстенсиональной установки на математику и реалистической трактовки функций, объективное значение которых отличается от субъективных возможностей логика построить эти функции (см. § 2.3). Таким образом, с точки зрения Рамсея, ещё одно возражение на программу логицизма снимается. Демонстрация тавтологичности аксиомы мультипликативности позволяет освободить её от обвинений в экстралогическом характере и обеспечивает сведение математики к логике в тех разделах, где требуется данная аксиома[1].

Интереснее дело обстоит с аксиомой бесконечности. В *ОМ* Рамсей использует идеи рукописи «Количество вещей в мире» (см. § 4.4), развивая их с помощью понятия экстенсиональной функции (см. выше § 3.6)[2]. Рассмотрим, как он это осуществляет.

---

[1] Здесь следует отметить, что Рамсей ошибся. Ещё Рассел доказал, что его аксиома мультипликативности тождественна аксиоме выбора Цермело [27. С. 61] (подробнее о связи разных формулировок аксиомы мультипликативности см. [13]). Однако в 60-х годах прошлого века П. Коэном была установлена независимость аксиомы выбора от других аксиом теории множеств. Как пишет Г. Санду, «среди прочего это означает, что существуют модели теории множеств, в которых аксиома выбора является ложной и, следовательно, не может быть тавтологией» [86. P. 252]. Таким образом, аксиому мультипликативности нельзя вывести из более простых тавтологий. Оказывается, что она действительно является экстралогической аксиомой и не может быть ни логической, ни математической тавтологией.

[2] В *ОМ* для демонстрации тавтологичности ***АБ*** Рамсей вводит специфические экстенсиональные функции. И здесь возникает вопрос, сохраняется ли при этом трансцендентальный аргумент при трактовке ***АБ***? Так, М. Поттер, основываясь на рукописи «Количество вещей в мире», реконструирует трансцендентальный аргумент Рамсея следующим образом: «(1) Если $p_{\aleph_0}$ – осмысленно, оно является истинным. (2) Если $q_{\aleph_0}$ – осмысленно, то $p_{\aleph_0}$ – осмысленно. (3) $q_{\aleph_0}$ – осмысленно. Следовательно, $p_{\aleph_0}$ – истинно» [73. P. 76] Здесь $p_{\aleph_0}$ – есть утверждение, соответствующее аксиоме бесконечности, а $q_{\aleph_0}$ – эмпирическое утверждение о бесконечности вещей в окружающем нас мире. Раскрывается это так: «Пусть $q_{\aleph_0}$ будет утверждением, что существует бесконечно много *эмпирических* вещей (электронов, протонов или каких-то других). Как предмет факта, это утверждение может быть ложным. Но ясно то, что Рамсей считает его осмысленным. А если оно – осмысленно, осмысленным также является предложение $p_{\aleph_0}$. Но, как мы видели, знаки $p_1, p_2, \ldots p_{\aleph_0}$ либо являются тавтологиями, либо – бессмысленны. Но, в частности, $p_{\aleph_0}$ не может быть осмысленным без того, чтобы быть истинным. Поскольку оно – осмысленно, оно – истинно. Но предложение $p_{\aleph_0}$ как раз и является аксиомой бесконечности (или, более точно, оно показывает то, что аксиома бесконечности неоправданно пытается сказать). Поэтому, мы можем заключить, что аксиома бесконечности является истинной» [73. P. 74]. При этом Поттер считает, что Рамсей отказывается от трансцендентального аргумента по той причине, что в *ОМ* он вводит экстенсиональные функции, которые не играют демонстративной роли в смысле тавтологий Витгенштейна. Однако основное в трансцендентальном аргументе Рамсея заключается всё-таки в том, что аксиома бесконечности трактуется как математическая тавтология. Экстенсиональные функции действительно не играют демонстративной роли, но являются лишь приспособлением для реализации программы логи-

Начнём с того, что преимущество своей трактовки ***АБ*** перед трактовкой *PM* Рамсей видит в том, что у Рассела в связи с его трактовкой тождества предполагается существование бесконечного числа различимых индивидов. Однако, как показал Витгенштейн, к существу логического введения индивидов относится то, что все свойства отдельных индивидов могут совпадать, но при этом ничего не мешает им оставаться различными объектами. Поэтому в такой формулировке ***АБ*** является эмпирической пропозицией, поскольку, «даже предполагая, что бесконечность индивидов должна быть, логика не может определить, существует ли их бесконечность, а не два, которые имеют общими все свойства» [17. С. 84]. Экстенсиональные функции Рамсея позволяют говорить просто о различных объектах, в том числе и об их бесконечности. И хотя в такой формулировке ***АБ*** всё ещё кажется эмпирической, можно показать, каким образом её можно представить как тавтологию. Для этого в качестве тавтологичной функции $T(x)$, рассмотренной выше в § 4.4, предлагается рассматривать само равенство '$x = x$', истолкованное с точки зрения экстенсиональных функций в смысле § 3.6.

Как и в рукописи «Количество вещей в мире», Рамсей предлагает начинать не сразу с ***АБ***, а с некоторого меньшего числа индивидов. Начнём с существования по крайней мере одного индивида. Это утверждение Рамсей предлагает записывать в виде

$$(\exists x) \,.\, x = x.$$

Если воспользоваться определением равенства через экстенсиональные функции, то это выражение преобразуется в следующее:

$$(\exists x)\,(\phi_e) \,.\, \phi_e x \equiv \phi_e x.$$

Но это выражение является очевидной тавтологией, поскольку, если квантор существования интерпретировать как бесконечную дизъюнкцию, мы получим

$$(\phi_e) \,.\, (\phi_e a \equiv \phi_e a) \vee (\phi_e b \equiv \phi_e b) \vee (\phi_e c \equiv \phi_e c) \vee \ldots$$

Каждый из дизъюнктов здесь является тавтологией, и, следовательно, тавтологией является всё выражение. В противном случае,

---

цизма. Однако в трансцендентальном аргументе это не главное. Главное как раз в том, что аксиому бесконечности можно представить как тавтологию. И именно возможность записать её в качестве тавтологии в разных способах представления свидетельствует в пользу её трансцендентальной истинности.

т.е. если индивидов не существует, всё это выражение оказывается бессмыслицей.

Аналогичные соображения касаются утверждения о существовании двух вещей, в качестве которого Рамсей предлагает следующее:

$(\exists x, y) \, . \, x \neq y.$

Если использовать экстенсиональные функции, то данное утверждение преобразуется следующим образом:

$(\exists x, y) \, (\phi_e) \, . \sim (\phi_e x \equiv \phi_e y).$

Опять-таки при интерпретации квантора существования как дизъюнкции получаем

$(\phi_e) \, . \sim (\phi_e a \equiv \phi_e b) \vee \sim (\phi_e a \equiv \phi_e c) \vee \sim (\phi_e b \equiv \phi_e c) \vee \ldots$

Данное утверждение является тавтологией, если существует две различных вещи, поскольку в этом случае один из дизъюнктов окажется тавтологией, а из свойств дизъюнкции следует, что тогда и вся дизъюнкция является тавтологией. В противном случае, т.е. если не существует двух различимых вещей, вся дизъюнкция окажется противоречием, поскольку противоречивыми окажутся все дизъюнкты. Таким образом, противоречивость данного утверждения показывает, что число индивидов меньше двух, а его тавтологичность – что число индивидов два или больше, поскольку при числе индивидов больше двух, это утверждение всегда будет тавтологией.

Нетрудно заметить, что подобным образом можно сконструировать аналогичное выражение для любого количества индивидов, вроде «Существует по крайней мере n индивидов», которое всегда будет тавтологией или противоречием. Как тавтологии и противоречия эти выражения не являются подлинными пропозициями в смысле Витгенштейна, т.е. они ничего не говорят о мире, но лишь нечто показывают. А именно, их противоречивость показывает, что число индивидов меньше n, их тавтологичность – что число индивидов равно или больше n. Как говорит Рамсей:

> Последовательность:
> «Существуют индивиды»,
> «Существует по крайней мере n индивидов»,
> «Существует по крайней мере $\aleph_0$ индивидов»,
> «Существует по крайней мере $\aleph_1$ индивидов»

начинается как тавтологичная; но где-то она становится противоречивой, и позиция последнего тавтологичного элемента показывает число элементов [17. С.85].

Таким образом, на этом пути мы можем получить то, что утверждает ***АБ***. Следует, правда, отметить, что мы вряд ли в состоянии актуально построить такое выражение. Но, как указывалось выше в § 2.5, Рамсей связывает невозможность построения функций с ограниченностью ресурсов строящего их логика, но не с объективным значением функций как таковых. Возможность построения тавтологичного выражения, аналогичного ***АБ,*** тесно связана с реалистической установкой Рамсея в отношении математики.

Следует отметить, что смысл такой трактовки утверждений о количестве индивидов совершенно отличается от того смысла, который придаётся им в *PM*. Для Рассела утверждение о количестве индивидов характеризует действительное состояние дел в мире. В этом ясно видна эмпирическая природа таких утверждений. Однако для Рамсея всё обстоит совершенно иначе. Подобного рода утверждения он трактует в трансцендентальном смысле, который относительно ***АБ*** был рассмотрен выше в § 4.3. Как считает Рамсей, было бы удивительно, если бы мы могли предвидеть количество индивидов в универсуме, используя утверждения о существовании. Дело не в этом. Конструируя выражения вида «Существует по крайней мере *n* индивидов», мы не характеризуем действительность, поскольку подобные выражения ничего не говорят, но, в соответствии с точкой зрения Витгенштейна, разделяемой Рамсеем, как тавтологии или противоречия нечто показывают относительно свойств знаковой системы. Демонстрируя тавтологичность и противоречивость подобных выражений, мы конструируем ограниченные универсумы рассуждения. Тавтологичность подобных выражений в одних универсумах рассуждений и противоречивость в других показывают, что такие универсумы возможны, и лишь возможность интересует логику как таковую. Лишь тогда, когда показано, что универсум с тем или иным количеством индивидов возможен, можно перейти к подлинным пропозициям, нечто говорящим о содержании данного универсума. Утверждения о существовании не доказываются, исходя из более простых утверждений, они принимаются в качестве аксиом, характеризующих возможные универсумы рассуждений, и в этом их трансцендентальный смысл. Всё это относится и к ***АБ***. Мы принимаем ***АБ*** не потому, что она характеризует действительное состояние дел, но принимаем её в качестве трансцендентального условия, задающего возможное описание соответствующего универсума. По утверждению Рамсея,

> аксиома бесконечности в логике всего мира, если она является тавтологией, не может быть доказана, но должна приниматься как исходная пропозиция. И, разумеется, мы должны её принять, если не предполагаем точку зрения, что всякий анализ является самопротиворечивым и бессмысленным. Мы ведь должны предполагать не то, что какое-то отдельное множество вещей, например атомов, является бесконечным, но просто то, что есть некоторый бесконечный тип, который мы можем принять как тип индивидов [17. С.86].

Интерпретация ***АБ*** с помощью экстенсиональных функций позволяет Рамсею решить поставленную им задачу, а именно, представить её как тавтологию. Казалось бы, программа логицизма получила надлежащую поддержку и была очищена от эмпирических предпосылок. Однако, как и в случае с аксиомой мультипликативности, всё оказалось не так-то просто.

Уже в статье «Математическая логика» (1926 г.), написанной всего через год после *ОМ*, Рамсей, давая экспозицию различных направлений в основаниях математики, высказывает сомнения в обоснованности ***АБ***. Несмотря на то, что часть идей из *ОМ*, в частности, касающихся собственного решения проблемы с аксиомой сводимости, он считает бесспорными, проблема с аксиомой сводимости не кажется ему решённой. Он не упоминает экстенсиональные функции и не говорит о том, что ***АБ*** может рассматриваться как тавтологичная характеристика определённого универсума рассуждения. Относительно программы логицизма в связи с этим затруднением он, в частности, пишет:

> У меня нет предположений, как развить эту тему далее. Я лишь надеюсь прояснить, что проблема является весьма сложной и что ведущие авторы весьма скептичны относительно того, можно ли чистую математику, как обычно подаётся, оправдать посредством логики [18. С. 109].

Очевидно, что Рамсей пересмотрел свои взгляды на возможность представить ***АБ*** в качестве тавтологии. Не вполне понятно, с чем это связано, поскольку в текстах самого Рамсея этого явно не обнаруживается. Однако в качестве одного из аргументов против подхода Рамсея к логической трактовке количества вещей в мире можно использовать замечание Витгенштейна, приводимое им в письме к Рамсею 1927 г., к которому мы уже обращались в § 3.7. Здесь Витгенштейн рассматривает выражение ‘$(\exists x) . x = x$’, которое Рамсей принимает за утверждение того, что индивиды существуют. Возражение Витгенштейна заключается в следующем:

> Ошибка становится ещё более ясной в своих следствиях, когда Вы пытаетесь сказать “Существует индивид”. Вы осознаёте тот факт, что предположение несуществования индивидов делает
>
> $(\exists x) . x = x \qquad E$
>
> “абсолютно бессмысленным”. Но если E должно говорить “Существует индивид”, то $\sim E$ говорит: “Не существует индивида”. Следовательно, из $\sim E$ следует, что E является бессмысленным. Следовательно, $\sim E$ само должно быть бессмысленным, а, следовательно, таковым должно быть и E [81. P. 340]. [*Здесь E есть сокращение для* $(\exists x) . x = x$ – ***В.С.***]

Витгенштейн утверждает, что отрицание осмысленного выражения не может быть бессмысленным, а если оно является таковым, значит, бессмысленным было и отрицаемое выражение. Таким образом, ряд утверждений о существовании n индивидов начинается с бессмысленного выражения. Но то же самое, по мнению Витгенштейна, относится и ко всем другим подобным выражениям.

Нельзя сказать, что Рамсей совершенно не видел этого возражения. В рукописи «Количество вещей в мире» он отчётливо осознаёт, что отрицания выражений существования являются бессмысленными, но в силу ряда причин предлагает считать их самопротиворечивыми (см. § 4.4). Однако такой ход в конечном счёте представляется Рамсею неверным, поскольку он согласен с этой критикой Витгенштейна. В черновике ответа на письмо Витгенштейна он соглашается с тем, что тот говорит относительно ‘$(\exists x) . x = x$', хотя и не вполне согласен с этим возражением относительно утверждений о существовании двух и более индивидов [81. P. 343]. Но, как бы то ни было, Рамсей не даёт развёрнутого ответа на это возражение.

Таким образом, после написания *ОМ* Рамсей уже не столь уверен в обоснованности программы логицизма. Он находит её всё более и более неудовлетворительной, несмотря на свои усилия освободить её от серьёзных возражений, связанных с использованием при её реализации экстралогических утверждений. Заканчивая статью «Математическая логика», он пишет:

> Несмотря на свои попытки преобразовать точку зрения Уайтхеда и Рассела, я думаю, что из-за многих затруднений её нельзя считать вполне удовлетворительной [18. С. 109].

В целом следует констатировать, что после 1927 г. Рамсей уже не обращается к программе логицизма с целью её модификации, поскольку, судя по всему, он в ней разочаровался. Последнее подтверждается также и тем фактом, что взгляды Рамсея постепенно эволюционируют в сторону умеренного интуиционизма и формализма, на что указывают его последние рукописи. Следующая глава как раз и посвящена этим изменениям во взглядах Рамсея.

5. Ф.П. РАМСЕЙ И ИНТУИЦИОНИЗМ Г. ВЕЙЛЯ

В рецензии на посмертно опубликованный сборник трудов Ф.П. Рамсея [78] Б. Рассел, касаясь представленных там архивных материалов, в частности, писал:

> Эти материалы в основном состоят из заметок, не предназначенных для публикации, что затрудняет их прочтение, поскольку они могли бы быть объяснены только в готовящейся публикации. Все эти материалы датированы 1929 г. и демонстрируют тенденцию в направлении взглядов Брауэра. Например, второй материал интерпретирует общие пропозиции как ‘вариативные гипотетические выражения’ (variable hypothetical). Они, если я правильно понял, вообще не являются пропозициями в обычном смысле, но ‘выводом, который мы в любое время готовы сделать’ [83. P. 481].

Изменение во взглядах Рамсея констатирует и Р. Брейтуейт, который был редактором данного сборника. В предисловии к нему он писал, что Рамсей в 1929 г. «обратился к финитистской точке зрения, которая отрицает существование какой-либо бесконечной совокупности» [46. P. xii]. Эти утверждения свидетельствуют о том, что Рамсей в последних работах отходит от логицизма в основаниях математики, существенно меняя точку зрения на ряд основных положений, которые лежали в её основе. Оценки Рассела и Брейтуейта указывают на то, что взгляды Рамсея эволюционировали в направлении интуиционизма, или, по крайней мере, в направлении той точки зрения, которая ограничивает представление о бесконечности в качестве допустимого понятия логики. Такие оценки указывают на то, что Рамсея нельзя однозначно рассматривать лишь как представителя реализма в основаниях математики, поскольку, в тенденции, его взгляды претерпевают существенные изменения. И эти изменения трансформируют образ Рамсея с реалиста на сторонника тех взглядов, к которым в ранних работах он относился критически[1].

В рукописях Рамсея нельзя найти последовательной экспозиции этих изменений. Более того, его последние работы были посвящены не основаниям математики, но философским проблемам других областей знания, в частности структуре научной теории и исследованию причинности. Однако в текстах 1929 г. «Теории» и «Общие пропозиции и причинность» можно обнаружить те изменения, о которых говорят Рассел и Брейтуэйт и которые применяются к ряду отдельных проблем.

Так, во втором из указанных текстов Рамсей относительно общих пропозиций, например, утверждает, что выражения “Все люди смертны” не являются конъюнкциями. Они лишь имеют определённое сходство с конъюнкциями, что обусловлено, во-первых, тем, что логическая запись вида ‘$(x)\ .\ \phi x$’ может выразить то, что относится к конечным классам (в том числе и классу людей), и, следовательно, в принципе может быть заменена конечной конъюнкцией вроде ‘$\phi a\ .\ \phi b\ .\ \phi c$ …’ (при условии, что мы можем перечислить все элементы класса, сопоставив им соответствующие индивидные константы). Во-вторых, если мы спрашиваем об условиях верификации выражений вида ‘$(x)\ .\ \phi x$’, то мы всегда склоняемся к тому, чтобы указать, что его истинность или ложность зависит от истинности или ложности выражений вида ‘ϕa’, ‘ϕb’, ‘ϕc‘ … . В-третьих, выражением ‘$(x)\ .\ \phi x$’ мы пользуемся лишь «из-за недостатка символической способности» [21, С. 186] в случае бесконечного или даже необозримого класса.

Все эти аргументы относятся к тому случаю, когда к подобным выражениям мы подходим объективно, ориентируясь на условия их истинности и ложности, но «когда мы смотрим на них субъективно, они отличаются совершенно» [21. С. 185]. Рамсей утверждает, что выражение ‘$(x)\ .\ \phi x$’ отличается от конъюнкции, во-первых, уже тем, что «его состав никогда не используется как конъюнкция; мы никогда не используем его в качестве мысли о классе, за исключением его применения к конечному классу» [21. С. 185], поскольку сопровождающая это использование достоверность может относиться

[1] Эти изменения во взглядах Рамсея предпочитают не замечать. Образ Рамсея как реалиста в основаниях математики в современной литературе вполне сложился. И здесь нельзя не согласиться с М. Мэрионом, который пишет: «Тем не менее, по большей части, эти изменения игнорируются. И преобладающие взгляды на Рамсея, что неверно, связывают его с крайним платонизмом» [69. P. 91].

только к отдельным случаям или к конечному классу этих отдельных случаев, но не может характеризовать даже случаи конечных, но необозримых классов, не говоря уже о бесконечных классах. Во-вторых, бесконечный или необозримый класс мы не можем выразить, перечисляя отдельные случаи, а, следовательно, даже не можем записать ‘$(x)\ .\ \phi x$’ как конъюнкцию.

Радикальный вывод Рамсея из этих аргументов заключается в том, что если выражение вида ‘$(x)\ .\ \phi x$’ «не конъюнкция, то оно вообще не пропозиция, и встаёт вопрос, каким образом оно вообще может быть верным или ошибочным» [21, С. 186]. Ответ Рамсея заключается в том, что выражения такого рода являются *вариативными гипотетическими выражениями* (variable hypothetical), не подлинными пропозициями, которые являются истинными или ложными, но утверждениями, «выражающими вывод, который мы в любое время готовы сделать, а не изначальную уверенность» [21. С. 185]. С точки зрения Рамсея, ‘$(x)\ .\ \phi x$’ выражает готовность сделать вывод от ‘$(x)\ .\ \phi x$’ к ‘ϕa’, например от “Все люди смертны” к “Герцог Веллингтон смертен”. При этом только “Герцог Веллингтон смертен” выражает подлинную пропозицию, которая может быть истинной или ложной. Но “Все люди смертны” всегда выходит за рамки того, что «мы знаем или хотим» [21. С. 185], это выражение не является подлинной пропозицией, являющейся истинной или ложной, но лишь подкрепляет нашу степень уверенности в способности сделать соответствующий вывод.

Подобный подход резко контрастирует с тем, что об общих пропозициях, под влиянием Витгенштейна, Рамсей писал в работе *ОМ*, которая считается крайнем выражением математического платонизма:

> Записывая ‘$(x)\,.\,fx$’, мы утверждаем логическое произведение всех пропозиций формы ‘fx’; записывая ‘$(\exists x)\,.\,fx$’, мы утверждаем их логическую сумму. Так, ‘$(x)\,.\,x$ – человек’ подразумевало бы ‘Каждый является человеком’; ‘$(\exists x)\,.\,x$ – человек’ – ‘Существует нечто, являющееся человеком’. В первом случае мы допускаем лишь возможность того, что все пропозиции формы ‘x – человек’ являются истинными; во втором случае мы лишь исключаем возможность того, что все пропозиции формы ‘x – человек’ являются ложными [17. С. 21].

Нетрудно заметить, что эта цитата вполне выражает то, что выше характеризовалось как объективный подход к общности. Но даже если на них смотреть субъективно, т.е. как на то, что связано с нашей степенью уверенности, то Рамсей также изменил свою точку зрения. Например, в работе «Факты и пропозиции» (1927 г.), где Рамсей адаптирует некоторый вариант прагматизма, условия верификации атомарной пропозиции *p* связываются с

> любым множеством действий, для полезности которых *p* является необходимым условием», при этом данное множество действий «может быть названо верой в *p* и поэтому быть истинным, если *p*, т.е. если эти действия являются полезными [19. С. 106].

Логическая форма уверенности определяет её каузальные свойства, и с этим, например, связано функционирование отрицания. Так, отсутствие уверенности в ‘*p*’ и уверенность в его отрицании вызывают одни и те же следствия, поскольку и то, и другое выражает одну и ту же установку. Как пишет Рамсей,

> мне кажется, что эквивалентность между верой в ‘не-*p*’ и неверием в ‘*p*’ должна определяться с точки зрения причинности; для этих двух обстоятельств общими являются многие из их причин и многие из их следствий [19. С. 108].

Подобный подход применим и к более сложным случаям, касающимся бинарных логических операций, таких как дизъюнкция и конъюнкция. Здесь степень усложнения по сравнению с отрицанием роли практически не играет, поскольку также отталкивается от системы истинностных оценок, принятых в рамках пропозициональной логики. Так, относительно дизъюнкции Рамсей пишет:

> Верить в *p* или *q* – значит выражать согласие со следующими возможностями: *p* – истинно и *q* – истинно, *p* – ложно и *q* – истинно, *p* – истинно и *q* – ложно, и выражать несогласие с оставшейся возможностью: *p* – ложно и *q* – ложно. Сказать, что чувство веры относительно предложения выражает такую установку, – значит сказать, что уверенность имеет определённые каузальные свойства, изменяющиеся вместе с установкой, т.е. с её изменением некоторые возможности выводятся из строя, а некоторые, так сказать, всё ещё остаются с нами [19. С. 110].

Более сложный случай должны были бы представлять утверждения общности. Но и здесь Рамсей, следуя Витгенштейну, рассматривает общие пропозиции как логическое произведение или логическую сумму атомарных пропозиций. Касаясь общих пропозиций, он, в частности, пишет:

> Относительно них я принимаю точку зрения м-ра Витгенштейна, что ‘Для всех x, fx’ должно рассматриваться как эквивалент логического произведения всех значений ‘fx’, т.е. комбинации fx_1 и fx_2 и fx_3 и … , и что ‘Существует x, такой что fx’ подобным же образом есть их логическая сумма. В связи с такими символами мы можем различить, во-первых, элемент общности, входящий особым способом в аргументы истинности, которые не перечисляются как ранее, но определяются как все значения некоторой пропозициональной функции, и, во-вторых, функционально-истинностный элемент, который является логическим произведением в первом случае и логической суммой во втором [19. С. 112].

Таким образом, даже при субъективном рассмотрении во взглядах на общность он использует, хоть и производный от Витгенштейна, но всё-таки логицистский подход.

Здесь возникает вопрос, почему, с точки зрения Рассела и Брейтуейта, изменение взглядов Рамсея в рукописных материалах 1929 г. на утверждения общности свидетельствует о его движении в сторону интуиционизма и финитизма? Ответ заключается в оценке характера логической формы выражений общности, которые теперь рассматриваются как *вариативные гипотетические выражения*. Как уже указывалось, в рукописи «Общие пропозиции и причинность» они более не рассматриваются как то, что является истинным или ложным и может быть представлено в виде конъюнкции или дизъюнкции частных случаев. Рамсей вообще отказывается рассматривать их как пропозиции, предпочитая считать их тем, что подкрепляет нашу степень уверенности при переходе к частным случаям.

Действительно, при оценке частных случаев уверенность в приписывании определённого свойства определённому предмету может основываться на том, что атомарные пропозиции являются истинными или ложными, именно на этом основывается уверенность в вынесении суждений вроде “Сократ – человек” или “Буцефал – человек”. На этом принципе могут основываться и случаи, касающиеся конечного и обозримого класса, когда не возникает проблем с перечислением его элементов, а, значит, они могут быть выражены конечной и обозримой совокупностью атомарных пропозиций, представленных в виде их конечной и обозримой конъюнкции или дизъюнкции. Случаи подобных пропозиций, как считает Рамсей, «встречаются человеку всякий раз, когда он образует её истинностную функцию, т.е. дизъюнктивно обосновывает случаи её истинности или ложности» [21. С. 186]. Но совершенно иное происходит при попытке оценить утверждения общности. Уверенность здесь не сводится к рассмотрению частных случаев на основе того, что каждое утверждение о них является истинным или ложным, так как все такие утверждения невозможно рассмотреть. Значит, принятие общего утверждения в качестве обоснованного не сводится к верификации отдельных пропозиций, соотносящихся с ним в качестве утверждения отдельных случаев.

Такой пример нам демонстрируют законы природы, которые, являясь утверждениями общности, никогда не могут быть представлены в виде конъюнкции или дизъюнкции всех отдельных случаев. Здесь, как считает Рамсей, уверенность уже не связывается с условиями истинности отдельных пропозиций, говорящих о частных событиях, но имеет принципиально иной характер. А именно, если закон природы выразить в форме утверждения общности вида ‘$(x) . \phi x$’, то должна рассматриваться не альтернатива между ‘$(x) . \phi x$’ и ‘$\sim (x) . \phi x$’, т.е. вопрос о верификации общего и противоречащего ему утверждения, но должны рассматриваться аргументы в пользу принятия какой-то из этих альтернатив, что должно оказывать влияние на нашу степень уверенности в большем или меньшем их правдоподобии. При этом сколь угодно большой массив свидетельств в пользу выражения ‘$(x) . \phi x$’ отнюдь не влечёт его принятие, поскольку все возможные свидетельства всё равно не могут быть перечислены. Однако и непринятие ‘$(x) . \phi x$’ вовсе не влечёт истинности его отрицания, т.е. истинности ‘$\sim (x) . \phi x$’ или, что эквивалентно, ‘$(\exists x) . \sim \phi x$’.

Приведём собственный пример. Пусть в качестве закона природы мы предлагаем утверждение “Все люди смертны”. Мы могли бы попытаться свести это общее утверждение к верификации отдельных его примеров вроде “Сократ умер”, “Платон умер”, “Аристотель умер” … и т.д. Однако в этом списке приписывание данного свойства не может быть конечным, хотя этот список и может быть обозримым. Действительно, я сам являюсь элементом этого спискам (и, слава богу, ещё жив), его элементами являются множество других людей, которые ещё не умерли. Поэтому верификация отдельных примеров ещё не является свидетельством в пользу верификации общего утверждения. Вполне возможно, что это общее утверждение объективно истинно, но это не означает, что я его принимаю. Более того, я вполне могу его не принимать. Моё собственное убеждение может ни в коей мере не согласовываться с условиями истинности отдельных утверждений, принимаемых в пользу его верификации. Для иллюстрации воспользуемся повестью Л.Н. Толстого «Смерть Ивана Ильича»:

> В глубине души Иван Ильич знал, что он умирает, но он не только не привык к этому, но просто не понимал, никак не мог понять этого. Тот пример силлогизма, которому он учился в логике Кизеветера: Кай – человек, люди смертны, потому Кай смертен, казался ему во всю его жизнь правильным только по отношению к Каю, но никак не к нему. То был Кай – человек, вообще человек, и это было совершенно справедливо; но он был не Кай и не вообще человек, а он всегда был совсем совсем особенное от всех других существо… И Кай точно смертен, и ему правильно умирать, но мне Ване, Ивану Ильичу, со всеми моими чувствами, мыслями, – мне это другое дело [38].

Хотя всем своим существом Иван Ильич отказывается принять суждение “Все люди смертны” во всей своей общности, очевидно, что вряд ли он считает за истинное суждение о существовании какого-то бессмертного человека. Таким образом, принятие того или иного общего утверждения напрямую не связано с признанием его истинным и не основывается на признании истинности его отдельных примеров. Считать утверждение общности истинным, основываясь на точке зрения функций истинности, – это одно, принять или не принять утверждение общности – это другое.

Как утверждает Рамсей, непринятие ‘$(x) \,.\, \phi x$’ в качестве «закона, ни в коей мере не влечёт ложность закона, т.е. не влечёт $(\exists x) \,.\, \sim \phi x$» [21, С. 186], т.е. если мы не принимаем того, что все элементы некоторого класса обладают данным свойством, то это отнюдь не означает, что существует такой элемент, который не обладает данным свойством. В этом как раз и состоит его позиция. Если я отказываюсь принимать какой-то закон, это отнюдь не влечёт его ложность, поскольку в этом случае я могу основываться не на соображениях об условиях истинности или ложности конъюнкции, что было бы в том случае, если выражения общности однозначно можно было бы к ней свести, но на каких-то других соображениях, ведущих к иной степени уверенности. В этом случае при оценке общих утверждений мы не должны исходить из того, что истинной должна оказаться одна из альтернатив ‘$(x) \,.\, \phi x$’ или ‘$(\exists x) \,.\, \sim \phi x$’, а это приводит к тому, что неверной оказывается равносильность ‘$(x) \,.\, \phi x \,.\equiv.\, \sim (\exists x) \,.\, \sim \phi x$’, принимаемая в классической кванторной логике. Последнее указывает на то, что Рамсей ограничивает применимость закона исключённого третьего только случаем атомарных пропозиций, не принимая его для утверждений общности.

Ограничение на применение принципа исключённого третьего всегда связывается с позицией интуиционизма. И здесь приведённые выше замечания Рассела вполне оправданы. Следует, правда, заметить, что Рамсей не вообще отказывается от данного принципа, но отказывается применять его к утверждениям общности, т.е. на уровне кванторной логики, не считая их пропозициями, т.е. тем, что может быть истинным или ложным, сохраняя его значимость для атомарных пропозиций, т.е. на уровне пропозициональной логики. Это позиция отличается от позиции Брауэра, который вообще отрицал значимость принципа исключённого третьего. Скорее, точка зрения Рамсея зависима от взглядов Г. Вейля, развивающего ‘умеренный’ интуиционизм, также ограничивая действие принципа исключённого третьего только рамками пропозициональной логики[1].

Оценивая свой вклад в программу интуиционизма и отличая её от общего подхода Брауэра, в работе «О новом кризисе основ математики» (1921 г.) Г. Вейль пишет, что на его собственный счёт относится то, что

> общие и экзистенциальные положения не являются вовсе суждениями в собственном смысле слова, не утверждают никакого обстояния, а являются указаниями на суждения или же абстракциями суждений [2. С. 120].

Как следует понимать это утверждение? Его следует рассматривать как раз в рамках принимаемых Г. Вейлем ограничений на использование принципа исключённого третьего.

Отказывая экзистенциальным и общим утверждениям в статусе того, что может быть истинным или ложным, Вейль апеллирует к тому, как они употребляются относительно свойств элементов на-

---

[1] Рамсей был хорошо знаком со взглядами Вейля, на что указывает, в частности, то, что, рассматривая позицию интуиционизма в работе «Математическая логика» (1926 г.) [18. С. 65–80], он в основном опирается на работы Вейля, а не Брауэра. Н.-Е. Салин указывает на то, что в архиве Рамсея содержится конспект работы Вейля «О новом кризисе основ математики», в котором упор сделан на аспектах квантификации и, хотя время создания конспекта относится ко времени, более раннему, чем изменения во взглядах Рамсея, точка зрения Вейля, несомненно, оказала на него влияние [85. P. 73]. У. Майер также считает, что на Рамсея значительное влияние оказал Вейль, в особенности во взглядах на квантификацию в рамках научной теории, где взгляды первого есть обобщение процедур квантификации, принимаемых вторым [64. P. 244].

турального ряда, противопоставляя их единичным утверждениям. Приписывать некоторое свойство отдельным элементам натурального ряда вполне осмысленно и приводит к истинным или ложным суждениям (Urtheil), но утверждения о существовании числа, обладающего определённым свойством, лишено смысла, поскольку предполагает перечисление всех элементов натурального ряда, что невозможно в силу его бесконечности. Например, утверждение “2 – чётное число” – это настоящее, выражающее определённое состояние дел суждение. В противоположность этому экзистенциальные утверждения вообще не являются суждениями в собственном смысле этого слова, так как не устанавливают некоторое фактическое состояние дел и не могут быть истинными или ложными. Таковым, например, является экзистенциальное утверждение “Существует чётное число”, поскольку предполагаемая им ‘бесконечная логическая сумма’, если экзистенциальное утверждение уподобляется дизъюнкции отдельных примеров, а именно, “1 чётна, или 2 чётно, или 3 чётно, или … *in infinitum*”, неосуществима. Действительно, последнее суждение, в отличие от первого, опирается на возможность перечисления всех элементов относительно предполагаемого свойства, что в принципе невозможно. Мы знаем, что чётные числа есть, но это опирается на знание того, что есть отдельные чётные числа, например 2, но отнюдь не на заявление о том, что они вообще существуют. В этом отношении утверждение “2 – чётное число” и утверждение “Существует чётное число” принципиально различны; первое является истинным суждением, поскольку соответствующее свойство относительно данного числа установлено, а второе вообще невозможно рассматривать как суждение, поскольку его истинность или ложность зависит от перечисления всех элементов натурального ряда, что невозможно. Как пишет Вейль,

> мнение, будто твердо определено, обладает ли какое-нибудь число свойством F или нет, опирается только на следующее представление. Числа 1, 2, 3, … могут быть по очереди, одно за другим испытаны в отношении свойства F. Если мы встретим при этом число, обладающее свойством F, то дальнейший просмотр для ряда можно прекратить. Ответ в этом случае гласит: да. Если же подобного перерыва не наступает, т.е. если *после законченного пересмотра* бесконечного числового ряда не было найдено ни одного числа рода F, ответ гласит: нет. Но мысль о таком законченном пересмотре членов бесконечного ряда бессмысленна [2. С. 105].

Таким образом, Вейль отказывается сводить экзистенциальные утверждения к бесконечным дизъюнкциям частных примеров. Относительно каждого дизъюнкта можно утверждать его истинность или ложность. Но экзистенциальное утверждение всё равно оказывается необоснованным, поскольку оно не сводится к такой дизъюнкции. При этом даже если все рассмотренные нами дизъюнкты являются ложными, это не даёт нам права утверждать, что ложным является общее утверждение, поскольку мы в принципе не можем рассмотреть их все, и, вполне возможно, что мы просто не дошли в нашем рассмотрении до соответствующего случая. Исследование отдельных случаев не может привести к общим утверждениям обо всех числах. Как пишет Вейль,

> не исследование отдельных чисел, а только исследование *сущности числа* может доставить мне общие суждения о числах. Только *действительно имевшее место* нахождение определенного числа, обладающего свойством *F*, может дать мне право на ответ: да, и – так как я не могу перебрать все числа – только усмотрение того, что обладание свойством ~*F* лежит в существе числа, дает мне право на ответ: нет. Сам Бог не имеет иных оснований для решения этого вопроса*. Но обе эти возможности уже не противостоят друг другу как утверждение и отрицание* – ни отрицание одной, ни отрицание другой не имеет реального смысла [2. С. 105].

Однако это не означает, что утверждения общности вообще не имеют никакого применения. Действительно, ответ ‘да’ возникает тогда, когда мы заканчиваем просмотр некоторой последовательности, обнаруживая число, обладающее свойством *F*. В этом случае коллизия разрешается, и мы можем сказать, что некоторые числа обладают этим свойством, а общее утверждение о его невыполнимости необоснованно. Здесь всё зависит от возможностей и способностей математика найти соответствующий элемент натурального ряда. Тем не менее относительно просмотра любой последовательности мы можем сказать, что её просмотр либо закончится, либо не закончится. И возможности и способности математика здесь уже не имеют значения. Так или иначе, он должен руководствоваться этой альтернативой. А возможность утверждения подобной альтернативы уже предполагает употребление общих и экзистенциальных выражений. Собственно говоря, альтернатива переходит с уровня суждения об определённом свойстве, которое может быть или не быть у некоторого числа, на уровень ‘усмотрения’ математиком сущности числа. Это усмотрение как раз и может результироваться в выражениях вроде ‘Существует число …’ или ‘Все числа …’.

Но сами эти выражения ни в коем случае не являются подлинными суждениями, которые могут быть истинными или ложными, они лишь свидетельствуют о когнитивной установке использующего их математика, который ‘путём внутренних усилий’ стремится ‘узреть их внутреннюю очевидность’. Математик, конечно, применяет выражения общности, но лишь с той целью, чтобы обосновать собственные усилия в поисках того или иного примера, который обосновывал бы приписывание или отрицание некоторого свойства. И здесь функция утверждений общности становится совершенно иной. Относительно экзистенциальных утверждений Вейль, в частности, пишет:

> В конце концов я нашёл для себя спасительное слово. *Экзистенциальное суждение* – вроде: “существует чётное число” – *не есть вообще суждение в собственном смысле слова, устанавливающее некоторое обстояние*, экзистенциальное обстояние суть пустая выдумка логиков. “2 – число чётное” – вот это действительное, выражающее определённое обстояние суждение, фраза же “существует чётное число” есть лишь полученная из этого суждения *абстракция суждения* (Urtheilsabstrakt) [2. С. 105].

Для того чтобы прояснить данное утверждение, Вейль приводит интересную аналогию. Представим себе карту, которая указывает на сокрытое сокровище. В этом случае единичное суждение, выражающее действительное состояние дел, указывало бы на то, где это сокровище сокрыто, но экзистенциальное утверждение (в случае, если мы его сводим к бесконечной дизъюнкции вроде: «Сокрыто здесь, или там, или там, или …) в лучшем случае побуждало бы нас к поискам, свидетельствуя о том, что сокровище где-то есть. Оно в лучшем случае было бы только стимулом организовать раскопки, не более. Однако это ‘не более’, с другой стороны, свидетельствует о том, что и ‘не менее’, поскольку оно ограничивает регион поисков. Пока мы не реализуем действительный поиск и не найдём сокровище, эта карта вообще не имеет никакого значения, она лишь указывает на то, где можно искать. Но если поиски удались, то сама карта приобретает значение, поскольку из её общих указаний удалось вывести тот частный случай, который привёл к успеху. Таким образом, ‘абстракция суждения’ есть вывод из того, что является чем-то вполне определённым. Только потому, что поиски удались, мы можем свидетельствовать об успешной применимости карты. Наличие карты побуждает нас организовать поиск, но лишь нахождение того, что нам нужно, свидетельствует о её полезности. То же самое относится к обоснованности математических суждений. Утверждение о существовании некоторого элемента натурального ряда, обладающего свойством F, может свидетельствовать только о том, что поиск какого-то определённого элемента увенчался успехом. В этом случае данное утверждение является своего рода картой без определённого указания, где этот элемент можно найти. Главное в том, что если такой элемент найден, то и утверждение о существовании подобных элементов вполне обосновано. Карта получает значение, она становится вполне обоснованной в глазах тех, кто использует её в качестве путеводителя. Тогда карта выступает в качестве некоторого закона, ограничивающего поиски там, где можно искать. Только тогда, когда можно найти закон, правило, однозначно определяющее поиски данного элемента, карта приобретает значение.

Доказательство существования определённого элемента числового ряда, обладающего некоторым свойством, если это доказательство основано на законах, определяющих построение числового ряда, только и даёт нам право утверждать, что из демонстрации конкретного числа, удовлетворяющего свойству F, следует, что такое число существует. При этом главное в том, что такое число приведено, а уж правило построения таких чисел имеет производный характер. Закон, определяющий построение таких чисел, производен, уже хотя бы потому, что такое число приведено в качестве примера. Пример здесь имеет определяющее значение. Вывод, что такой пример существует, – производное[1]. Смысл такого производного приме-

[1] Воспользуемся примером, приведённым М. Мэрионом: «Понять идею Вейля может помочь элементарный пример, вроде теоремы Эвклида о бесконечности простых чисел. Теорема утверждает, что ‘простых чисел больше любого заданного их количества’. Классическое доказательство строится как *reduction ad absurdum*. Начинаем с предположения, что существует наибольшее простое число p_n. Следовательно, можно перечислить все простые числа: $p_1 \dots p_n$. Затем определяем число N: $N = [p_1 \times p_2 \times p_3 \times \dots \times p_n] + 1$. Число N является либо простым, либо составным. Если оно простое, то мы приходим к противоречию, поскольку оно было бы больше, чем все простые числа, меньшие или равные p_n , и простых чисел было бы больше чем n. Если оно является составным, то оно должно было бы без остатка делиться на простое число. Но этот простой делитель не может быть простым числом, меньшим или равным p_n, поскольку они оставляли бы в остатке 1. Следовательно, должно быть другое простое число, большее чем p_n. С точки зрения Вейля, утверждение ‘существует простое число x, такое что $n < x \leq N$’ выражает собственно суждение, поскольку N остаётся в рамках конечной области. Кроме того, доказательство даёт нам достаточно информации для того, чтобы найти следующее простое число. Но если область бесконечна, как в случае утверждения ‘существует простое число, такое что

ра заключается в том, что мы можем абстрагироваться от конкретного, полученного нами примера и утверждать только то, что такой пример мы можем привести. Если я утверждаю, что существует чётное число, то это есть следствие, что суждение "2 – чётное число" является истинным. Это касается любых числовых последовательностей. Приписывание некоторого свойства определённому его члену всегда предшествует общему утверждению о существовании такого члена. Утверждение о существовании такого члена может иметь основание только тогда, когда такой член мы можем привести в качестве примера, в качестве члена определённой последовательности. Но мы не всегда это можем сделать. И Вейль это подтверждает:

> Действительно, мы говорили выше, когда речь шла о числовых последовательностях и об определяющих их до бесконечности законах: если нам удалось построить закон со свойством *F*, то мы вправе утверждать, что существуют законы вида *F*; право утверждать это нам может дать только уже *удавшееся* построение; о *возможности* построения нет и речи. Но что же это за суждение, которое, взятое само по себе, лишено всякого смысла, и получает *смысл* лишь на основании проведённого доказательства, только и гарантирующего истинность суждения? Это вовсе не суждение, это *абстракция суждения* (Urtheilsabstrakt) [2. С. 106].

Что в таком случае означает 'абстракция суждения'? Абстракция суждения есть основание сделать вывод. Этот вывод основывается только на том, что из установленной истинности или ложности суждения о конкретном случае можно вывести обоснованность утверждения о существовании. Так, истинное суждение "2 – чётное число" позволяет сделать вывод, что чётные числа существуют. В свою очередь, утверждение о существовании является основанием предполагать, что искомое свойство может быть вообще предписано числам натурального ряда. В противном случае оно не имеет никакого значения. Эта абстракция является лишь свидетельством того, что мы всегда можем получить конкретный пример, хотя бы уже тот, из которого это экзистенциальное утверждение было получено. Причём

$n < x$', демонстрация невозможна и утверждение не может быть интерпретировано как сокращение для бесконечной дизъюнкции: $n + 1$ является простым $\vee$ $n + 2$ является простым $\vee$ $n + 3$ является простым $\vee$ $n + 4$ является простым $\vee$ …, и если говорящий не знает уже какого-то особого числа $x > n$, относительно которого он может показать, что оно является простым, он не находится в ситуации, чтобы утверждать $\exists x$ F (x), поскольку это было бы неоправданным утверждением» [69. P. 86].

этот вывод сам по себе не имеет значимого характера, поскольку он зависит не от того, что объективно есть, но от того, что мы готовы объективно принять. Таким образом, экзистенциальные утверждения являются абстракциями суждения в том смысле, что они могут быть выведены из единичных суждений, но сами по себе они не имеют никакого значения, в частности, нельзя утверждать их истинность или ложность. Экзистенциальные утверждения получают значения только в рамках вывода следующего вида: $\phi a \rightarrow (\exists x) \,.\, \phi x$[1].

Подобные рассуждения касаются и общих утверждений. Как говорит Вейль,

> точно так же общее высказывание “Каждое число обладает свойством F” (например, “Для каждого числа m мы имеем $m + 1 = 1 + m$”) не является вовсе действительным суждением, а только общим *указанием на суждение* (Anweisungen auf Urteile). Если я имею дело с каким-либо отдельным числом, например с числом 17, то из этого указания на суждение я могу вывести действительное суждение, именно, 17 + 1 = 1 + 17 [2. С. 106].

Аналогия, которую приводит Вейль, уподобляет общие утверждения твёрдой оболочке, в которую заключены плоды. Конечно, оболочка имеет значение, но не сама по себе. Для того чтобы ‘вкусить плод познания’, оболочку следует разломать и извлечь из неё плоды. Таким образом, общие утверждения являются указанием на суждения в том смысле, что из них вытекает многообразие единичных суждений, но утверждать, что они истинны сами по себе, не имеет смысла. Как и экзистенциальные утверждения, они получают своё значение только в рамках вывода следующего вида: $(x) \,.\, \phi x \rightarrow \phi a$.

Подчёркивая сходство в функционировании экзистенциальных и общих утверждений, Вейль тем не менее фиксирует и различия:

> Общие суждения, которые я выше называл указаниями на суждения, разделяют с собственными суждениями то свойство, что они самодовлеющи, они даже содержат в себе бесконечную полноту действительных суждений. В этом отношении мы должны поставить общие суждения в один ряд с суждениями действительными. Конечно, в отличие от последних мы не будем говорить об общих суждениях, что они истинны, мы будем охотнее выражаться так:

[1] На то, что экзистенциальные и общие утверждения у Вейля должны рассматриваться не сами по себе, но только в рамках вывода подобного рода, первым обратил внимание У. Майер [64. P. 245; 65. P. 177].

они правомерны, они содержат правовое основание для всех ‘реализующихся’ из них сингулярных суждений. Наоборот, какое-нибудь экзистенциальное суждение, взятое само по себе, есть *ничто*; если суждение, из которого извлечена подобная абстракция суждения, забыто нами или утеряно, то действительно *ничего* не остаётся (если не иметь в виду, как мы говорили выше, стимула разыскать суждение) [2. С.107].

Однако, несмотря на различия в способах функционирования, пожалуй, для Вейля они сходны в главном. По сути дела, он отказывает общим и экзистенциальным утверждениям в объективной оценке. Они не могут быть истинными или ложными сами по себе, они вообще не могут быть истинными или ложными, поскольку применение общих и экзистенциальных утверждений зависит от когнитивной установки использующего их математика. Общее утверждение есть лишь основание для истинностной оценки суждения, говорящего об отдельном примере. Как таковое оно не является совершенно неважным или бесполезным, оно оправдывает переход к суждению о единичном случае и в этом своём качестве всё-таки оправдано как основание вывода. Но здесь главную роль играет когнитивная установка, намерение использовать общее утверждение как основание истинностной оценки вытекающего из него действительного суждения. Точно так же когнитивная установка оказывает решающую роль при использовании экзистенциальных утверждений. Если невозможно привести пример единичного суждения и, стало быть, производного от него экзистенциального суждения, то это отнюдь не означает, что всеобщее значение имеет общее утверждение. Даже если ‘ничего’ не остаётся, это не даёт основания для того, чтобы делать вывод о том, что известно всё, поскольку, по крайней мере, может оставаться ‘стимул разыскать суждение’.

Из такого подхода к общим и экзистенциальным утверждениям вытекают важные для логической теории следствия. Несмотря на формальное сходство приведённых выше формул $\phi a \rightarrow (\exists x) . \phi x$ и $(x). \phi x \rightarrow \phi a$ с правилами классической кванторной логики, мы получаем систему, более слабую, чем классическая кванторная логика. Связано это с тем, что подобные правила у Вейля есть реализация определённой когнитивной установки, которая делает неприменимыми многие принципы классической логики, поскольку общим и экзистенциальным утверждениям отказывается в значимости самим по себе. Он, в частности, пишет:

> Наше учение об общих и экзистенциальных суждениях не носит вовсе расплывчато-неопределенного характера, это ясно хотя бы потому, что из него тотчас же вытекают важные, строго логические выводы. И, в первую очередь, тот вывод, что совершенно бессмысленно отрицать подобные суждения, вывод, с которым отпадает возможность применения к этим суждениям аксиомы исключительного третьего [9. С. 107].

Действительно, если математик не располагает примером ϕa и, следовательно, не может сделать вывод, что $(\exists x) . \phi x$, это не означает, что он должен утверждать $\sim\phi a$, и ещё в меньшей степени это должно заставлять его принять общее утверждение $(x) . \sim\phi x$. Так же и наоборот, отсутствие примера $\sim\phi a$, а значит, отсутствие вывода $(\exists x) . \sim\phi x$ не означает, что математик склонен к тому, чтобы принять общее утверждение $(x) . \phi x$. А это означает, что $(\exists x) . \phi x$ и $(x) . \sim\phi x$ (так же как и $(x) . \phi x$ и $(\exists x) . \sim\phi x$) не противостоят друг другу как утверждение и отрицание. Тем самым не выполняются фундаментальные эквивалентности классической кванторной логики, а именно, $\sim(\exists x) . \phi x . \equiv . (x) . \sim\phi x$ и $\sim(x) . \phi x . \equiv . (\exists x) . \sim\phi x$, и принцип исключённого третьего оказывается неверным.

Нетрудно заметить, что взгляды Рамсея образца 1929 г. с точки зрения проведённого выше анализа производны от взглядов Г. Вейля. Параллелизм особенно очевиден в подходе к принципу исключённого третьего и в трактовке значимости когнитивной установки того, кто оценивает утверждения общности. Здесь приведём одну цитату из рукописи Рамсея «Формальная структура интуиционистской математики», в которой по существу выражена представленная выше точка зрения Вейля и которая лишний раз свидетельствует, что Рамсею импонирует именно умеренный интуиционизм:

> Мы не можем интерпретировать общую математическую пропозицию как бесконечную функцию истинности её примеров… Мы не можем сказать: “Либо такой ряд либо существует, либо нет”, если мы некоторым образом не ограничим его длину, как, например, когда мы говорим: “Я либо нашёл такой ряд, либо нет”. Тогда, представляется, что общая математическая пропозиция не соответствует суждению, как ему соответствует единичная пропозиция, хотя с помощью подстановки оно ведёт к таким суждениям и функциям истинности любого конечного числа таких суждений. Когда мы доказали такую пропозицию, мы можем, конечно, высказать суждение, что доказали её (и суждение, что любой её пример является истин-

ным), но это не эквивалентно самой пропозиции, например, “Я не доказал *p*” не есть то же самое “Я доказал не-*p*” [81. P. 204].

Отсутствие доказательства не свидетельствует в пользу того, что есть опровергающий пример, первое и второе не являются противоречием, поскольку доказательство должно свидетельствовать о наличии примера, а его отсутствие может свидетельствовать только о том, что такое доказательство мы не в состоянии привести. В работе «Общие пропозиции и причинность» Рамсей, вполне в соответствии с приведённой выше цитатой, утверждает:

> Неизвестная истина в теории чисел не может интерпретироваться как (неизвестная) пропозиция, истинная для всех чисел, но как доказанная или доказуемая пропозиция. Доказуемость, в свою очередь, подразумевает доказуемость для любого числа шагов, и, согласно финитистским принципам, это число должно быть некоторым образом ограничено, например, до человечески возможного [21. С. 190].

Представленные выводы Рамсея относительно принципа исключённого третьего полностью совпадают с выводами Вейля, одинаково рассматривается и значение когнитивной установки. В самом деле, множество примеров, подтверждающих утверждение общности, не приводит к оценке общего утверждения как истинного, поскольку в перспективе может обнаружиться опровергающий пример. Когнитивная установка может только руководствоваться большей или меньшей степенью уверенности в том, что такой пример можно привести. Как утверждает Рамсей,

> фактическое согласие и несогласие возможны относительно любого аспекта точки зрения человека и не обязательно принимают простую форму ‘*p*’ и ‘не-*p*’. Многие предложения выражают когнитивные установки, не будучи пропозициями, и различие между тем, чтобы сказать ‘да’ или ‘нет’ относительно когнитивной установки, не является различием между тем, чтобы сказать ‘да’ или ‘нет’ относительно пропозиции [21. С. 187].

Общее утверждение лишь свидетельствует о том, что вывод относительно частного случая мотивирован. И здесь именно в духе Вейля трактует Рамсей общие пропозиции, когда утверждает:

> Вариативные гипотетические выражения являются не суждениями (judgments), но правилами для вынесения суждения (judging):

> “Если мне встретится ϕ, я буду рассматривать его как ψ”. Последнее нельзя *отрицать*, но с ним может *не соглашаться* тот, кто его не приемлет [21. С. 189].

Общие утверждения лежат в основании вывода, что нечто обстоит так, как я с этим согласен. Моё согласие с общим состоянием дел как раз и служит для того, что я с уверенностью вывожу отсюда частные случаи.

Утверждение общности здесь играет роль того, на что можно сослаться при отсутствии других аргументов. Из общего утверждения мы лишь выводим то, к чему склоняет нас собственная убеждённость. Степень убеждённости не увеличивается возрастанием примеров. Точно так же сомнение не опровергает убеждённость, пока нет опровергающего примера. Здесь не играет роли, чья это убеждённость – математика (в случае Вейля) или того, кто никогда не решал никаких уравнений. Установки на общность утверждений у Рамсея есть следствие привычки и «не включают никакой загадочной идеи, помимо идеи привычки» [21. С. 189]. Привычка склоняет нас к принятию общих утверждений, но эти последние ничего не значат сами по себе, они получают значение только в применении относительно частных выводов[1]. Как пишет Рамсей:

---

[1] На этом акцентируют внимание Р. Холтон и Х. Прайс: «В современной терминологии мы можем сказать, что точка зрения Рамсея заключается в том, что принять обобщение – значит овладеть двойной установкой: быть склонным к уверенности одного сорта, тогда как некто принимает уверенность другого сорта, и произнести некоторое предложение. Он стремится сказать, что, поскольку они не являются суждениями (judgments), общие предложения нельзя отрицать. Однако с ними можно не соглашаться в том смысле, что некто может ошибаться, принимая рассматриваемую установку» [61. P. 330]. Считая, что здесь определяющую роль играет когнитивная установка, а не правила классической логики, Р. Холтон и Х. Прайс утверждают, что в некотором смысле Рамсей предвосхищает проблему следования правилу, поставленную Витгенштейном в *Философских исследованиях*. Диспозиционная установка тем не менее вряд ли адекватна пониманию данной проблемы у Витгенштейна. Например, С. Крипке считает, что диспозиционная установка в отношении следования правилу как раз и была основной критической темой Витгенштейна [11]. Тем не менее позиция Рамсея, несомненно, оказала влияние на Витгенштейна, о чём последний пишет в предисловии к *Философским исследованиям*: «Вновь занявшись философией шестнадцать лет назад, я был вынужден признать, что моя первая книга содержит серьёзные ошибки. Понять эти ошибки – в той мере, в какой я сам едва ли смог бы это сделать, – мне помогла критика моих идей Фрэнком Рамсеем, в бесчисленных беседах с которым я обсуждал их множество раз в течение двух последних лет его жизни» [3. С. 78]. Интуиционистский подход к логике с вытекающими отсюда следствиями, видимо, и послужил отходу Рамсея от позиций логицизма и отказу Витгенштейна от своих ранних взглядов, о чём пишет Н.-Е. Салин [85].

> Верить, что все люди смертны, – что же это означает? Отчасти говорить так, отчасти верить в отношении любого подвернувшегося x, что если он – человек, то он смертен. Общая уверенность включает (a) общую формулировку, (b) привычку к единичному убеждению. Они, конечно, связаны. Склонность выводится из формулировки согласно психологическому закону, который формирует значение ‘все’ [21. С. 188].

‘Общая формулировка’ здесь имеет определяющее значение. От ‘общей формулировки’ мы как раз и переходим к частному случаю. Мотивы Г. Вейля здесь очевидны, поскольку, по сути дела, общие утверждения Рамсей рассматривает только в контексте вывода. Сами по себе утверждения общности не имеют никакого значения, они лишь принимают участие в обоснованном выводе, вроде: $(x)\ .\ \phi x \rightarrow \phi a$. Здесь оценка частного случая неразрывно связана с общим утверждением. Имея привычку принимать общее утверждение, мы принимаем и все вытекающие из неё следствия. С этим утверждением у Рамсея связана и трактовка закона причинности:

> Утверждая каузальный закон, мы утверждаем не факт, не бесконечную конъюнкцию, не конъюнкцию универсалий, но вариативное гипотетическое выражение, которое, строго говоря, вообще не является пропозицией, но является формулой, из которой мы выводим пропозиции [21. С. 197].

Каузальная связь объясняется через привычку делать определённые выводы, если есть когнитивные основания, т.е. убеждённость в том, что нечто должно обстоять так, а не иначе. В этом случае апелляция к привычке представляет Рамсея как адепта прагматизма, поскольку оценка истинности или ложности полученного вывода связывается не с тем, что есть на самом деле, а с тем, что мы принимаем в силу привычки, основанной на уверенности в полезности или бесполезности последующего действия[1].

---

[1] Прагматизм Рамсея сам по себе представляет обширную и интересную тему. Как указывалось выше, прагматистскую позицию Рамсей выказывает уже в статье «Факты и пропозиции» (1927 г.), правда, там он ещё представляет себя как сторонника логицизма и трактует общие и экзистенциальные утверждения в духе Витгенштейна как сокращения для конъюнкций и дизъюнкций. Однако уже в работе «Об истине», составленной публикаторами из рукописей 1927–1929 гг., Рамсей, касаясь верификации утверждений с теоретическими терминами, пишет, что «эти, так называемые пропозиции не выражают суждений и, на наш взгляд, не демонстрируют исключение из того, что единичные суждения являются истинными или ложными; но они интересны в качестве демонстрации того, что

Неизвестно какую форму в конечном счёте приняла бы и в какой степени была бы связана с той или иной версией интуиционизма философия математики позднего Рамсея[1]. Выражение “поздний Рамсей” относительно человека, прожившего всего 26 лет, звучит достаточно странно, тем не менее очевидна эволюция его взглядов от ‘раннего реализма и платонизма’ к признанию значимости когнитивной установки при принятии тех или иных способов рассуждения. Полагаем, что если бы Рамсей успел написать ещё одну работу по основаниям математики, она имела бы совершенно иной характер, чем работы, опубликованные до 1928 г.

значительный корпус предложений, который по видимости выражает суждения и с которым обращаются согласно законам формальной логики, может вообще не выражать суждений» [80. P. 34]. С учётом того, что в этом тексте Рамсей стоит на позициях прагматизма, а выражения с теоретическими терминами он впоследствии начинает трактовать как утверждения с квантификацией, можно сказать, что здесь в определённом смысле намечается попытка синтеза прагматизма с интуиционизмом, что в конечном счёте приводит ко взглядам 1929 г. на общие предложения и теоретические термины. Как пишет У. Майер, «*интуиционистский* подход Рамсея к теориям вполне совместим с *прагматическим* понятием истины как *согласия* теории с экспериментальными наблюдениями. На самом деле, интуиционистский подход Вейля к теориям есть по существу прагматическая теория истины и наоборот» [65. P. 166].

[1] Например, Р. Холтон и Х. Прайс, ссылаясь на некоторые пассажи из рукописи Рамсея «Бесконечность в теориях» 1929 г. [см. 11], считают, что они «несут весьма формалистский оттенок, и в них Рамсей демонстрирует тот же самый подход к общим суждениям, который имеет место в *Общих пропозициях и причинности*. Мы принимаем это как хорошее свидетельство в пользу того, что Рамсей прежде всего мотивирован формалистским, а не интуиционистским подходом» [61. P. 332]. Однако различная квалификация взглядов Рамсея образца 1929 г. как формалиста, близкого Д. Гилберту, или интуициониста, следующего Г. Вейлю, не отменяет того факта, что он отходит от логицизма.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бенацерраф П.* Фреге: последний логицист // Фреге Г. Логико-философские труды. – Новосибирск: Сиб. унив. изд-во, 2008. – С. 252–280.
2. *Вейль Г.* О философии математики. – М.: КомКнига, 2005.
3. *Витгенштейн Л.* Философские исследования // Витгенштейн Л. Философские работы. Часть 1. – М.: Гнозис, 1994.
4. *Витгенштейн Л.* Логико-философский трактат. – М.: «Канон+» РООИ «Реабилитация, 2008.
5. *Витгенштейн Л.* Дневники 1914–1916. – М.: «Канон+» РООИ «Реабилитация, 2009.
6. *Гильберт Д., Аккерман В.* Основы теоретической логики. – М.: ИЛ, 1947.
7. *Кантор Г.* Труды по теории множеств. – М.: Наука, 1985.
8. *Карри Х.Б.* Основания математической логики. – М.: Мир, 1969.
9. *Колмогоров А.Н., Драгалин А.Г.* Математическая логика. – М.: Едиториал УРСС, 2005.
10. *Клини С.К.* Введение в метаматематику. – М.: ИЛ, 1957.
11. *Крипке С.* Витгенштейн о правилах и индивидуальном языке. – М.: Канон +, 2010.
12. *Куайн У.В.О.* Философия логики. – М.: «Канон+» РООИ Реабилитация, 2008.
13. *Медведев А.В.* Ранняя история аксиомы выбора. – М.: Наука, 1982.
14. *Меллор Д.Х.* Фрэнк Пламптон Рамсей // Рамсей Ф.П. Философские работы. – М.: «Канон+» РООИ Реабилитация, 2011. – С. 337– 365.
15. *Пуанкаре А.* О науке. – М.: Наука, 1983.
16. *Рамсей Ф.П.* Философские работы. – М.: «Канон+» РООИ Реабилитация, 2011.
17. *Рамсей Ф.П.* Основания математики // Рамсей Ф.П. Философские работы. – М.: «Канон+» РООИ Реабилитация, 2011. – С. 16–86.
18. *Рамсей Ф.П.* Математическая логика // Рамсей Ф.П. Философские работы. – М.: «Канон+» РООИ Реабилитация, 2011. – С. 87–109.
19. *Рамсей Ф.П.* Факты и пропозиции // Рамсей Ф.П. Философские работы. – М.: «Канон+» РООИ Реабилитация, 2011. – С. 140–161.
20. *Рамсей Ф.П.* Теории // Рамсей Ф.П. Философские работы. – М.: «Канон+» РООИ Реабилитация, 2011. – С. 231–263.
21. *Рамсей Ф.П.* Общие пропозиции и причинность // Рамсей Ф.П. Философские работы. – М.: «Канон+» РООИ Реабилитация, 2011. – С. 264–292.
22. *Рамсей Ф.П.* Критические замечания о «Логико-философском трактате» Л. Витгенштейна // Рамсей Ф.П. Философские работы. – М.: «Канон+» РООИ Реабилитация, 2011. – С. 310–336.
23. *Рассел Б.* Основания математики. Приложение *В* // Вестник Томского государственного университета. Философия. Социология. Политология. 2008. № 1 (2). – С. 123–129.
24. *Рассел Б.* Об обозначении // Рассел Б. Избранные труды. – Новосибирск: Сиб. унив. изд-во, 2007. С. 17–32.

25. *Рассел Б.* Введение в математическую философию. – Новосибирск: Сиб. унив. изд-во, 2007.

26. *Рассел Б.* Введение // Витгенштейн Л. Логико-философский трактат. – М.: «Канон+» РООИ Реабилитация, 2008. – С. 11–31.

27. *Рассел Б.* Математическая логика, основанная на теории типов // Рассел Б. Введение в математическую философию. – Новосибирск: Сиб. унив. изд-во, 2007.- С. 21–66.

28. *Суровцев В.А.* Автономия логики: источники, генезис и система философии раннего Витгенштейна. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2001.

29. *Суровцев В.А.* Теория типов Б. Рассела и язык математики // Филология и философия в современном культурном пространстве: проблемы взаимодействия. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2006. – С. 81–103.

30. *Суровцев В.А.* Аксиома сводимости, теория типов Ф.П. Рамсея и реализм в математике // Вестник Томского государственного университета. Философия. Социология. Политология. –2007. № 1. – С. 41–64.

31. *Суровцев В.А.* Л. Витгенштейн и Ф.П. Рамсей о тождестве // Вестник Томского государственного университета. Философия. Социология. Политология. – 2009. № 4(8). – С. 89–103.

32. *Суровцев В.А.* Ф.П. Рамсей о количестве вещей в мире // Вестник Томского государственного университета. Философия. Социология. Политология. – 2010. № 2(10). – С. 144–159.

33. *Суровцев В.А.* Б. Рассел о бесконечности // Вестник Томского государственного университета. Философия. Социология. Политология. – 2010. № 4(12). – С. 135–145.

34. *Суровцев В.А.* Л. Витгенштейн и Ф.П. Рамсей о тождестве (2) // Вестник Томского государственного университета. Философия. Социология. Политология. – 2011. № 2(14). – С. 144–159.

35. *Суровцев В.А.* Л. Витгенштейн и Ф.П. Рамсей о тождестве (3) // Вестник Новосибирского государственного университета (серия: Философия). – 2011. Т. 9, вып. 3. – С. 156–166.

36. *Суровцев В.А.* Л. Витгенштейн об экстенсиональных функциях Ф.П. Рамсея // Вестник Новосибирского государственного университета (серия: Философия). – 2011. Т. 9, вып. 4. – С. 143–154.

37. *Суровцев В.А., Эннс И.А.* Ф.П. Рамсей и интуиционизм Г. Вейля // Вестник Томского государственного университета. Философия, социология, политология. – 2012. № 2(18). – С. 173–187.

38. *Толстой Л.Н.* Собрание сочинений в двадцати томах. – М.: Художественная литература, 1964. Том 12.

39. *Уайтхед А.Н., Рассел Б.* Основания математики: в 3 т. – Самара: Изд-во «Самарский университет», 2005–2006.

40. *Фреге Г.* Основоположения арифметики // Фреге Г. Логико-философские труды. – Новосибирск: Сиб. унив. изд-во, 2008. – С. 125–239.

41. *Фреге Г.* Исчисление понятий // Фреге Г. Логика и логическая семантика. – М.: Аспект Пресс, 2000. – С. 71–78.

42. *Фреге Г.* Функция и понятие // Фреге Г. Логика и логическая семантика. – М.: Аспект Пресс, 2000. – С. 215–229.

43. *Френкель А., Бар-Хиллел И.* Основания теории множеств. – М.: Мир, 1966.

44. *Целищев В.В.* Философия математики. – Новосибирск: Наука, 2002.

45. *Almeida Marques de J.O.* Waismann, Ramsey, Wittgenstein e o Axioma da Redutibilidade // Cardenos de História e Filosofia da Ciência, CLE-UNICAMP, série 3, v. 2, n. 1, 1992. P. 5–48.

46. *Braithwaite R.* Editor Introduction // Ramsey F.P. The Foundation of Mathematics and Other Logical Essays. – London, Routledge and Kegan Paul, 1931. – P. ix-xiv.

47. Cambridge and Vienna: Frank P. Ramsey and the Vienna Circle (ed. M.C. Galavotti). – Vienn Springer Veklag, 2006.

48. *Carnap R*. The Logicist Foundations of Mathematics // Philosophy of Mathematics (eds. Benacerraf P. and Putnam H.). – Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1964. – P. 31–41.

49. *Chihara C.S*. Ramsey's Theory of Types: Suggestions for a Return to Fregean sources // Prospect for Pragmatism: Essays in Memory of F.P. Ramsey. – Cambridge University Press, 1980. – P. 21–48.

50. *Dammit M*. The Vicious Circle Principle // Cambridge and Vienna: Frank Ramsey and The Vienna Circle. – Springer, 2006. – P. 29–34.

51. *Degen J.W*. Logical Problems Suggested by Logicism // Cambridge and Vienna: Frank P. Ramsey and the Vienna Circle. – Springer, 2006. – P. 123–138.

52. Dialectica, Special Issue: Ramsey (guest ed. J. Dokic, P. Engel), Vol. 58, Fasc.4, 2004.

53. *Dokic J., Engel P*. Frank Ramsey: Truth and Success. – London and New York: Routledge, 2002.

54. *Egidi R*. Ramsey and Witgenstein on Scientific Theories // Theoria, vol. LVII, part 3, 1991. – P. 196–210.

55. *Fogelin R.J*. Wittgenstein on Identity // Fogelin R.J. Philosophical Interpretation. – Oxford University Press. – P. 169–185.

56. *Fogelin R.J*. Wittgenstein. – London: Routledge and Kegan Paul, 1976.

57. F.P. Ramsey: Critical Reassessment (ed. M.J. Frápolli). – London and New York: Continuum, 2005.

58. *Frege G*. Philosophical and Mathematical Correspondence. – Oxford: Basil Blackwell, 1980.

59. *Frege G*. Grundgesetze der Arithmetik. – 1893. B. I, 1903.B. II – reprinted Georg Olms Verlag: Hildsheim, Zurich, New York. – 1998.

60. *Hochberg H*. Russell, Ramsey, and Wittgenstein on Ramification and Quantification // Erkenntnis. 1987. Vol. 27, № 2/ – P. 257–282.

61. *Holton R., Price H*. Ramsey on Saying and Whistling: A Discordant Note // Nous. 2003. Vol. 37, Issues 2. – P. 325–341.

62. *Köhler E*. Ramsey and the Vienna Circle on Logicism // Cambridge and Vienna: Frank P. Ramsey and the Vienna Circle. – Springer, 2006. – P. 91–122.

63. *Lewy C*. A Note on the Text of the *Tractatus* // Mind, 1967. – Vol. 61. – P. 416–423.

64. *Majer U*. Ramsey's Conception of Theories: an Intuitionistic Approach // History of Philosophy Quarterly. – 1989. Vol. 6, № 2. – P. 233–258.

65. *Majer U*. Ramsey's Theory of Truth and the Truth of Theories: A Synthesis of Pragmatism and Intuitionism in Ramsey's Last Philosophy // Theoria. – 1991. Vol. LVII, part 3. – P. 162–195.

66. *Majer U*. Ramsey's Removal of Russell's 'axiom of reducibility' in the Light of Hilbert's Critique of Russell's Logicism // F.P. Ramsey: Critical Reassements. – London, New York: Continuum, 2005. – P.161–181.

67. *Marion M*. Wittgenstein and Ramsey on Identity // From Dedekind to Gödel. Essays on Development of the Foundation of Mathematics. – Kluwer Academic Publishers, 1995. – P. 344–371.

68. *Marion M*. Wittgenstein and Finitism // Synthese. – 1995/ № 105.. – P. 141–176.

69. *Marion M*. Wittgenstein, Finitism and the Foundations of Mathematics. – Oxford, Clarendon Press, 1998.

70. *McGuiness B*. Wittgenstein and Ramsey // Cambridge and Vienna: Frank Ramsey and The Vienna Circle. – Springer, 2006. – P. 19–28.

71. Metaphisica. International Journal for Ontology and Metaphysics, Special Issue 3: Ramsey's Ontology (ed. M.C. Galavotti), 2005.

72. *Moore G.E.* Introduction // Ramsey F.P. The Foundation of Mathematics and Other Logical Essays. – London^ Routledge and Kegan Paul, 1931.

73. *Potter M.* Ramsey's Transcendental Argument // Ramsey's Legacy. – Clarendon Press, Oxford University Press, 2005. – P. 71–82.

74. Prospect for Pragmatism: Essays in Memory of F.P. Ramsey (ed. Mellor D.H.). – Cambridge University Press, Cambridge/1980.

75. *Psillos S.* Ramsey's Ramsey-sentences // Cambridge and Vienna: Frank Ramsey and The Vienna Circle. – Springer, 2006. – P. 67–90.

76. *Quine W.* Set Theory and Its Logic. – Cambridge: Cambridge University Press, 1963.

77. Ramsey's Legacy (ed. H. Lillehammer and D.H. Mellor) – Clarendon Press, Oxford University Press, 2005.

78. *Ramsey F.P.* The Foundation of Mathematics and Other Logical Essays. – London^ Routledge and Kegan Paul, 1931.

79. *Ramsey F.P.* Philosophical Papers. – Cambridge University Press, 1990.

80. *Ramsey F.P.* On Truth (ed. N. Rescher and U. Majer). – Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1990.

81. *Ramsey F.P.* Notes on Philosophy, Probability and Mathematics (ed. M.C. Galavotti). – Napoli: Bibliopolis, 1991.

82. *Russell B.* The Principles of Mathematics. – Cambridge University Press, 1903.

83. *Russell B.* Critical Notice on "The Foundation of Mathematics and Other Logical Essays" by F.P. Ramsey. – Mind. – 1931. Vol. 40. № 160. – P. 476–482.

84. *Sahlin N.-E.* The Philosophy of F.P. Ramsey. – Cambridge University Press, 1990.

85. *Sahlin N.-E.* 'HE IS NO GOOD FOR MY WORK': On the Philosophical Relations between Ramsey and Wittgenstein // Knowledge and Inquiry: Essays on Jaakko Hintikka's Epistemology and Philosophy of Science. – Rodopi, Amsterdam, 1997. – P. 61–84.

86. *Sandu G.* Ramsey and the Notion of Arbitrary Function // F.P. Ramsey: Critical Reassessments. – London, New York: Continuum, 2005. – P. 237–256.

87. *Sullivan P.M.* Wittgenstein on "The Foundations of Mathematics" of Ramsey. – Theoria. – 1995. Vol. LXI, p.2. – P. 105–42.

88. Theoria (A Swedish Journal of Philosophy), Special Issue on the Philosophy of F.P. Ramsey (ed. M.C. Galavotti). 1991. Vol. LVII, Part 3.

89. *White R.* Wittgenstein on Identity // Proceedings of the Aristotelian Society, New Series. 1977–1978. Vol. 78. – P. 157–174.

90. *Whitehead A., Russell B.* Principia Mathematica (second edition). Cambridge University Press, 1925–1927. Vol. 1—3.

91. Wittgenstein and the Vienna Circle. – Oxford: Basil Blackwell, 1979.

92. *Wittgenstein L.* Philosophical Grammar. – Oxford: Basil Blackwell, 1974.

93. *Wittgenstein L.* Philosophical Remarks. – Oxford: Basil Blackwell, 1975.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Н а у ч н о е и з д а н и е

Валерий Александрович
СУРОВЦЕВ

Ф.П. РАМСЕЙ
И ПРОГРАММА ЛОГИЦИЗМА

Редактор В.С. Сумарокова
Компьютерная верстка Т.В. Дьяковой

Подписано к печати 0,3.07.2012 г. Формат 60x84$^{1}/_{16}$.
Печ. л.20,88; усл. печ. л. 19,42; уч.-изд. л. 20,12.
Тираж 300. Заказ №

ООО «Издательство ТГУ», 634029, Томск, ул. Никитина, 4
ООО «Интегральный переплет», 634040, г. Томск, ул. Высоцкого, 28, стр. 1.